BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP. HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HCM
KHOA TOÁN - TIN HỌC

GIẢI TÍCH HÀM MỘT BIẾN

CHƯƠNG 1

TẬP HỢP - MỆNH ĐỀ - ÁNH XẠ

Giảng viên: **TRẦN TRÍ DŨNG**

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP. HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HCM
KHOA TOÁN - TIN HỌC

GIẢI TÍCH HÀM MỘT BIẾN

CHƯƠNG 1

TẬP HỢP - MỆNH ĐỀ - ÁNH XẠ

Giảng viên: **TRẦN TRÍ DŨNG**

NHÓM 1:

Họ và tên	MSSV	Công việc
1. Phan Vũ Thanh (nhóm trưởng)	44.01.101.133	Bài 9, 10
2. Trương Công Sơn	44.01.101.123	Bài 5, 6
3. Đỗ Minh Giang	44.01.101.060	Bài 8
4. Tô Minh Phương	44.01.101.111	Bài 1, 3
5. Nguyễn Đình Hiếu	44.01.101.070	Bài 2, 4
6. Nguyễn Việt Đức	44.01.101.058	Bài 7
7. Bùi Thuận Yến	42.01.101.180	Đánh máy bài 6,7,8,9,10
8. Nguyễn Thị Quỳnh Trang	42.01.101.158	Đánh máy bài 1,2,3,4,5

Bài 1: Chứng minh các tính chất đã nêu ở mục 1.1.3.

a. Tính giao hoán

• $A \cup B = B \cup A$

$x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B \vee x \in A \Leftrightarrow x \in (B \cup A)$

$\Rightarrow (A \cup B) \subset (B \cup A)$

Tương tự $(B \cup A) \subset (A \cup B)$

Suy ra $A \cup B = B \cup A$

• $A \cap B = B \cap A$

$x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in (B \cap A)$

$\Rightarrow (A \cap B) \subset (B \cap A)$

Tương tự $(B \cap A) \subset (A \cap B)$

Suy ra $A \cap B = B \cap A$

b. Tính kết hợp

• $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$$x \in (A \cup B) \cup C \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \\ x \in C \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$$

$\Rightarrow ((A \cup B) \cup C) \subset (A \cup (B \cup C))$

Tương tự $(A \cup (B \cup C)) \subset ((A \cup B) \cup C)$

Suy ra $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

• $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$$x \in (A \cap B) \cap C \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \\ x \in C \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C)$$

$\Rightarrow ((A \cap B) \cap C) \subset (A \cap (B \cap C))$

Tương tự $(A \cap (B \cap C)) \subset ((A \cap B) \cap C)$

Suy ra $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

c. Tính phân phối

• $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in A \vee \left\{\begin{array}{l} x \in B \\ x \in C \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right. \wedge \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in C \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\Rightarrow (A \cup (B \cap C)) \subset ((A \cup B) \cap (A \cup C))$

Tương tự $((A \cup B) \cap (A \cup C)) \subset (A \cup (B \cap C))$

Suy ra $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

• $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A \wedge \left[\begin{array}{l} x \in B \\ x \in C \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right. \vee \left\{\begin{array}{l} x \in A \\ x \in C \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\Rightarrow (A \cap (B \cup C)) \subset ((A \cap B) \cup (A \cap C))$

Tương tự $((A \cap B) \cup (A \cap C)) \subset (A \cap (B \cup C))$

Suy ra $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

d. Tính chất đối ngẫu De Morgan

• $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$x \in (A \cap B)^c \Rightarrow x \in X \backslash (A \cap B) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in X \\ x \notin A \\ x \notin B \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in X \backslash A \\ x \in X \backslash B \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c \Rightarrow (A \cap B)^c \subset (A^c \cup B^c)$

Tương tự $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$

Suy ra $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

• $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$x \in (A \cup B)^c \Rightarrow x \in X \backslash (A \cup B) \Leftrightarrow x \in X \wedge \left[\begin{array}{l} x \notin A \\ x \notin B \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} x \in X \backslash A \\ x \in X \backslash B \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in (A^c \cap B^c) \Rightarrow (A \cup B)^c \subset (A^c \cap B^c)$

Tương tự $(A^c \cap B^c) \subset (A \cup B)^c$

Suy ra $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Bài 2: Cho các tập hợp A, B, C. Chứng minh:
a)$A \cap (B \setminus A) = \varnothing$ b)$A \cup (B \setminus A) = A \cup B$ c)$(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$
d)$A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$
e)$A^c \cap B^c = B^c$ và $B \subset A$ khi và chỉ khi $A = B$

a)

Giả sử $A \cap (B \backslash A) \neq \varnothing$

Khi đó $x \in A \cap (B \backslash A)$

Suy ra $\begin{cases} x \in A \\ x \in B \wedge x \notin A \end{cases} \Leftrightarrow x \in A \cap B \cap A^c = \varnothing$ (vô lý)

Vậy $A \cap (B \backslash A) = \varnothing$

Cách 2:

$A \cap (B \backslash A) = A \cap (B \cap A^c) = (A \cap A^c) \cap B = \varnothing$

b)

$A \cup (B \backslash A) = A \cup (B \cap A^c) = (A \cup B) \cap (A \cup A^c) = A \cup B$

c)

$(A \cap B) \cup (A \backslash B) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A \cap (B \cup B^c) = A$

d)

$A \backslash (B \backslash C) = A \backslash (B \cap C^c)$

$= A \cap (B \cap C^c)^c = A \cap (B^c \cup C)$

$= (A \cap B^c) \cup (A \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$

e)

$(\Rightarrow) A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = B^c \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

Mà $B \subset A$

$\Rightarrow A = B$

$(\Leftarrow)$ Ta có $A = B \Rightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$

$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow (A \cup B)^c = B^c \Leftrightarrow A^c \cap B^c = B^c$

Bài 3: Cho A, B là các tập con của X và C, D là các tập con của Y. Chứng minh:
a)$(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$ b)$(A \times C) \cup (A \times D) = A \times (C \cup D)$
c)*$(A \times C) \cup (B \times D) \subset (A \cup B) \times (C \cup D)$ Cho ví dụ chỉ đẳng thức không xảy ra.

a)

Lấy $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) \in (A \times C) \\ (x,y) \in (B \times D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \wedge y \in C \\ x \in B \wedge y \in D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \cap B \\ y \in C \cap D \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$

Vậy $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$

b)

Lấy $(x, y) \in (A \times C) \cup (A \times D)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x,y) \in (A \times C) \\ (x,y) \in (B \times D) \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ y \in C \end{cases} \vee \begin{cases} x \in B \\ y \in D \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \left[\begin{array}{l} y \in C \\ y \in D \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ y \in (C \cup D) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x, y) \in A \times (C \cup D)$

Vậy $(A \times C) \cup (A \times D) = A \times (C \cup D)$

c)*

• Chứng minh

Lấy $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times D)$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} (x,y) \in (A \times C) \\ (x,y) \in (B \times D) \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \wedge y \in C \\ x \in B \wedge y \in D \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array} \right. \wedge \left[\begin{array}{l} y \in C \\ y \in D \end{array} \right.$$

$\Rightarrow (x, y) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$

$\Rightarrow (A \times C) \cup (B \times D) \subset (A \cup B) \times (C \cup D)$

• Ví dụ để đẳng thức không xảy ra

$A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{3\}, D = \{4\}$

$\Rightarrow (A \times C) \cup (B \times D) = \{(1, 3), (2, 4)\}$

$A \cup B = \{1, 2\}$

$C \cup D = \{3, 4\}$

Lấy $(x, y) = (1, 4) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$

$(1, 4) \notin (A \times C) \cup (B \times D)$

Bài 4:Bằng cách lập bảng giá trị logic 0 và 1, hãy chứng minh Mệnh đề 1.2.2

• $p \Rightarrow q \equiv \overline{q} \Rightarrow \overline{p} \equiv \overline{p} \vee q$.

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \Rightarrow q$	$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$	$\overline{p} \vee q$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

• $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}, \overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$.

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$
1	1	0	0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1

• $\overline{p \Rightarrow q} \equiv p \wedge \overline{q}$

p	q	$\overline{q}$	$p \wedge \overline{q}$	$p \Rightarrow q$	$\overline{p \Rightarrow q}$
1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0

Bài 5: Xét p, q là các mệnh đề trong ví dụ 1.2.1. Hãy phát biểu và xét tính đúng, sai của mệnh đề sau đây: $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \Rightarrow q$, $\overline{p}$, $\overline{p} \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$.

(*Ví dụ 1.2.1*: Cho p là mệnh đề: 17 là số nguyên tố, còn q là mệnh đề: $\sqrt{2}$ là số hữu tỷ. Khi đó $p \equiv 1$ $q \equiv 0$)

Phát biểu:
• $p \vee q$: 17 là số nguyên tố hoặc $\sqrt{2}$ là số hữu tỷ
• $p \wedge q$: 17 là số nguyên tố và $\sqrt{2}$ là số hữu tỷ
• $p \Rightarrow q$: nếu 17 là số nguyên tố thì $\sqrt{2}$ là số hữu tỷ
• $\overline{p}$: 17 không là số nguyên tố
• $\overline{p} \Rightarrow q$: nếu 17 không là số nguyên tố thì $\sqrt{2}$ là số hữu tỷ
• $p \Leftrightarrow q$: 17 là số nguyên tố nếu và chỉ nếu $\sqrt{2}$ là số hữu tỷ

Để xét tính đúng sai của mệnh đề đã cho, ta có bảng:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$\overline{p}$	$\overline{p} \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	0	1	0	0	0	1	0

Bài 6: Trong các phát biểu dưới đây, phát biểu nào là mệnh đề. Hãy nêu tính đúng sai của từng mệnh đề.
a) $\forall k \in \mathbb{Z} : k^2 - k \geq 0$.
b) $\forall z \in \mathbb{Z}, \exists r \in \mathbb{Q} : z^2 - rz + r \geq 1$.
c) Tồn tại một hành tinh có khối lượng lớn hơn Trái Đất.
d) Tất cả các con chó có đôi cánh đều có bộ lông màu trắng.
e)* Với mọi số nguyên không âm x, y, z, nếu $x^{2015} + y^{2015} = z^{2015}$ thì $x + y \geq z$.

Các phát biểu đã cho đều là mệnh đề.
a)
Ta có:$k^2 - k \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k \leq 0 \\ k \geq 1 \end{array}\right.$
Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên mệnh đề trên là đúng.

b)
Ta có: $\forall z \in \mathbb{Z}, \exists r = 2 \in \mathbb{Q} : z^2 - rz + r \geq 1$. Do đó mệnh đề đã cho là đúng.
c) Mệnh đề đã cho đúng vì có Mộc tinh là hành tinh có khối lượng lớn hơn Trái Đất.
d) Xét mệnh đề: Tồn tại một con chó x sao cho x có đôi cánh và x không có bộ lông màu trắng.
Vì không có con chó nào có cánh nên mệnh đề này sai.
Vậy mệnh đề đã cho là đúng.
e)
* Xét mệnh đề:
Với mọi số nguyên không âm x, y, z, nếu $x + y < z$ thì $x^{2015} + y^{2015} \neq z^{2015}$. (1)
Ta có: $x + y < z$
$\Rightarrow (x + y)^{2015} < z^{2015}$
$\Rightarrow x^{2015} + C_{2015}^1 x^{2014} y + C_{2015}^2 x^{2013} y^2 + \cdots + y^{2015} < z$
$\Rightarrow x^{2015} + y^{2015} < z^{2015}$ (do x, y, z là số nguyên không âm)
$\Rightarrow x^{2015} + y^{2015} \neq z^{2015}$
Vậy (1) đúng nên mệnh đề đã cho đúng.

Bài 7: Cho ánh xạ $f : X \to Y$. Giả sử A_1, A_2 là các tập con của X còn B_1, B_2 là các tập con của Y. Chứng minh
a)$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$; $\quad f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
b)$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$; $\quad f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
c)Nếu f đơn ánh thì $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

a)
* Chứng minh: $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
Lấy $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$
$\Rightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2$
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \in B_1 \\ f(x) \in B_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in f^{-1}(B_1) \\ x \in f^{-1}(B_2) \end{array}\right.$
$\Rightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \Rightarrow f^{-1}(B_1 \cup B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
Chứng minh tương tự cho chiều ngược lại.
Vậy $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
*Tương tự ta chứng minh được $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
b)
*Chứng minh $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$:
Lấy $y \in f(A_1 \cup A_2)$
$\Rightarrow \exists x \in A_1 \cup A_2 : f(x) = y$
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \in f(A_1) \\ f(x) \in f(A_2) \end{array}\right. \Rightarrow y = f(x) \in f(A_1) \cup f(A_2)$
Do đó $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$.
Chứng minh tương tự cho chiều ngược lại.
Vậy $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
*Chứng minh $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
TH1: VT=$\varnothing$
TH2: VT$\neq \varnothing$
Lấy $y \in f(A_1 \cap A_2)$
$\Rightarrow \exists x \in A_1 \cap A_2 : f(x) = y$

$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \in f(A_1) \\ f(x) \in f(A_2) \end{cases} \Rightarrow y = f(x) \in f(A_1) \cap f(A_2)$
Vậy $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
c)
Lấy $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$
$y \in f(A_1) \Rightarrow \exists x_1 \in A_1 : y = f(x_1)$
$y \in f(A_2) \Rightarrow \exists x_2 \in A_2 : y = f(x_2)$
Do f đơn ánh nên $x_1 = x_2 = x$
$\Rightarrow x \in A_1$ và $x \in A_2$
$\Rightarrow x \in A_1 \cap A_2$
$\Rightarrow y = f(x) \in f(A_1 \cap A_2)$
Do đó $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$.
Vậy ta có đpcm.

Bài 8*: Cho ánh xạ $f : X \to Y$. Khi đó các phát biểu a) và b) là tương đương:
a)f đơn ánh.
b) Với mọi tập con A của X, ta đều có $A = f^{-1}(f(A))$.
Các phát biểu c) và d) cũng tương đương:
c)f toàn ánh.
d)Với mọi tập con B của Y, ta đều có $B = f(f^{-1}(B))$.

*Chứng minh a)$\Leftrightarrow$b):

- a$\Rightarrow$b
  Giả sử f đơn ánh. Ta chứng minh $A = f^{-1}(f(A))$.

  - Lấy $x \in A$ tùy ý.
    $\Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$
    Suy ra $A \subset f^{-1}(f(A))$

  - Lấy $x \in f^{-1}(f(A))$ tùy ý.
    $\Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow \exists x' \in A : f(x') = f(x)$
    Do f đơn ánh nên $x' = x \Rightarrow x \in A$
    Suy ra $f^{-1}(f(A)) \subset A$

  Vậy $A = f^{-1}(f(A))$.

- b$\Rightarrow$a
  Cách 1:
  Giả sử $A = f^{-1}(f(A)), \forall A \subset X$. Ta chứng minh f đơn ánh.
  Thật vậy, lấy $x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2)$
  Đặt $A_1 = \{x_1\}, A_2 = \{x_2\}$
  Suy ra $f(A_1) = \{f(x_1)\} = f(A_2) = \{f(x_2)\}$
  $\Rightarrow A_1 = f^{-1}(f(A_1)) = f^{-1}(f(A_2)) = A_2$
  $\Rightarrow x_1 = x_2$.

Suy ra f đơn ánh.
Cách 2:
Giả sử f không đơn ánh
$\Leftrightarrow \exists x, x' \in X : f(x) = f(x') \wedge x \neq x'$.
Lấy $A \subset X : x \in A \wedge x' \notin A$
Khi đó $x \in f^{-1}(f(A)) \Rightarrow f(x) \in f(A)$
mà $f(x) = f(x') \Rightarrow f(x') \in f(A)$
$\Rightarrow x' \in f^{-1}(f(A)) \Rightarrow x' \in A$ (mâu thuẫn với $x' \notin A$).
Vậy f đơn ánh.

Vậy a⇔b.
*Chứng minh c)⇔d):

- c⇒d
  Giả sử f toàn ánh

  - Lấy $y \in B$
    $\Rightarrow \exists x \in X : y = f(x)$ (do f toàn ánh)
    $\Rightarrow f(x) \in B \Rightarrow x \in f^{-1}(B)$
    $\Rightarrow f(x) \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow y \in f(f^{-1}(B))$.
    Suy ra $B \subset f(f^{-1}(B))$.

  - Lấy $y \in f(f^{-1}(B))$
    $\Rightarrow \exists x \in f^{-1}(B) : y = f(x)$
    Ta lại có $x \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(x) \in B \Rightarrow y \in B$.
    Suy ra $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

  Vậy $B = f(f^{-1}(B))$.

- d⇒c
  Giả sử f không toàn ánh $\Leftrightarrow \exists y \in Y, \forall x \in X : y \neq f(x)$. (1)
  Lấy $B \in Y$ sao cho $y \in B$
  Khi đó $y \in f(f^{-1}(B))$ (do $B = f(f^{-1}(B))$)
  $\Rightarrow \exists x \in f^{-1}(B) \subset X : f(x) = y$ (mâu thuẫn với (1)).
  Vậy f toàn ánh.

Vậy c⇔d.

Bài 9: Cho các ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$. Chứng minh:
a) Nếu $g \circ f$ là đơn ánh thì f là đơn ánh.
b) Nếu $g \circ f$ là toàn ánh thì g là toàn ánh.
c) Nếu f và g song ánh thì $g \circ f$ cũng song ánh. Khi đó các ánh xạ $f, g, g \circ f$ đều có các ánh xạ ngược thỏa mãn tính chất sau: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

a) Lấy $x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2)$
$\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

$\Rightarrow g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$
$\Rightarrow x_1 = x_2$ (do $g \circ f$ đơn ánh)
Vậy f đơn ánh.
b) Lấy $z \in Z$
$\Rightarrow \exists x \in X : z = g \circ f(x) = g(f(x))$
$\Rightarrow \exists y = f(x) \in Y : z = g(y)$.
Vậy g toàn ánh.
c)

1. Chứng minh $g \circ f$ song ánh:

   - Chứng minh $g \circ f$ đơn ánh:
     Lấy $x, x' \in X : g \circ f(x) = g \circ f(x')$
     Khi đó: $g(f(x)) = g(f(x'))$
     $\Rightarrow f(x) = f(x')$ (do g đơn ánh)
     $\Rightarrow x = x'$ (do f đơn ánh)
     Suy ra $g \circ f$ đơn ánh.
   - Chứng minh $g \circ f$ toàn ánh:
     Lấy $z \in Z \Rightarrow \exists y \in Y : z = g(y)$ (g toàn ánh)
     Vì f toàn ánh nên $\exists x \in X : y = f(x)$
     Suy ra ta có: $\exists x \in X : z = g(f(x)) = g \circ f(x)$
     Suy ra $g \circ f$ toàn ánh.

   Vậy $g \circ f$ song ánh.

2. Chứng minh $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$:
   Lấy $z \in Z$ tùy ý, ta có:
   $(g \circ f)^{-1}(z) = x \in X$
   $\Rightarrow z = g \circ f(x) = g(f(x))$
   $\Rightarrow f(x) = g^{-1}(z) = y \in Y$
   $\Rightarrow x = f^{-1}(y) = f^{-1}(g^{-1}(z)) = f^{-1} \circ g^{-1}(z)$.
   Vậy $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Bài 10: Cho các ánh xạ $f, g : X \to X$ sao cho $f \circ g$ là song ánh. Chứng minh rằng f đơn ánh khi và chỉ khi g toàn ánh.

- Chiều thuận:
  Giả sử f đơn ánh.
  Lấy $b \in X$, đặt $c = f(b)$
  $\Rightarrow \exists a \in X : c = f \circ g(a) = f(g(a)) = f(b)$ (do $f \circ g$ toàn ánh)
  Vì f đơn ánh nên $b = g(a)$
  Từ đó ta có: $\forall b \in X, \exists a \in X : b = g(a)$.
  Suy ra g toàn ánh.

- Chiều đảo:
  Giả sử g toàn ánh.
  Lấy $b_1, b_2 \in X : f(b_1) = f(b_2)$.
  Vì g toàn ánh nên $\begin{cases} \exists a_1 \in X : g(a_1) = b_1 \\ \exists a_2 \in X : g(a_2) = b_2 \end{cases}$
  Khi đó ta có: $f(g(a_1)) = f(g(a_2)) \Leftrightarrow f \circ g(a_1) = f \circ g(a_2)$
  $\Rightarrow a_1 = a_2$ (do $f \circ g$ đơn ánh)
  $\Rightarrow b_1 = b_2$
  Suy ra f đơn ánh.

Vậy f đơn ánh khi và chỉ khi g toàn ánh.