# Mục lục

# Chương 1

# TẬP HỢP - MỆNH ĐỀ - ÁNH XẠ

## 1.1 TẬP HỢP

### 1.1.1 Các khái niệm mở đầu

Trong toán học hiện đại, người ta coi *tập hợp* là một khái niệm cơ bản dùng để chỉ một lớp các đối tượng nào đó, chẳng hạn tập hợp các thiên hà trong vũ trụ, tập hợp các sinh viên năm nhất trong một trường đại học, tập hợp các khách sạn năm sao ở Nha Trang, ...

Các tập hợp thường được kí hiệu bởi các chữ in hoa $A, B, C, ...$, còn các đối tượng tạo nên tập hợp thường được kí hiệu bởi các chữ in thường $a, b, c, ...$ và được gọi là các phần tử của tập hợp. Khi $a$ là một phần tử của tập hợp $A$ thì ta kí hiệu $a \in A$ (đọc là: $a$ thuộc $A$), ngược lại ta sẽ kí hiệu $a \notin A$ (đọc là: $a$ không thuộc $A$). Tập hợp không chứa phần tử nào cả được gọi là *tập rỗng*, kí hiệu $\varnothing$.

Cho hai tập hợp $A$ và $B$. Nếu mọi phần tử của $A$ đều là phần tử của $B$ thì ta nói $A$ là *tập hợp con hay tập con* của $B$, kí hiệu $A \subset B$ hoặc $B \supset A$ (đọc là: $A$ bao hàm trong $B$, $A$ chứa trong $B$ hoặc $B$ chứa $A$). Rõ ràng phép toán bao hàm $\subset$ có các tính chất sau đây:

- $A \subset A$.
- $\varnothing \subset A$.
- Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$.

Hai tập hợp $A, B$ được gọi là *bằng nhau* nếu $A \subset B$ và $B \subset A$, kí hiệu $A = B$.

**Ví dụ 1.1.1** *Tập hợp các số tự nhiên* $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; ...\}$ *là tập con của tập hợp các số nguyên* $\mathbb{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; ...\}$. *Cả hai tập hợp* $\mathbb{N}$ *và* $\mathbb{Z}$ *đều là các tập con của tập hợp các số hữu tỉ* $\mathbb{Q}$, *trong đó* $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$.

### 1.1.2 Các phép toán cơ bản trên các tập hợp

Từ các tập hợp $A$ và $B$, ta có thể tạo ra những tập hợp mới bằng các phép toán cơ bản sau đây:

**a) Phép giao:** Giao của hai tập hợp $A$ và $B$, kí hiệu $A \cap B$ (đọc: $A$ giao $B$), là tập hợp gồm tất cả các phần tử thuộc đồng thời cả hai tập hợp đó.

Trong trường hợp $A \cap B = \varnothing$, ta nói $A$ và $B$ là hai tập *rời nhau*.

**b) Phép hợp:** Hợp của hai tập hợp $A$ và $B$, kí hiệu $A \cup B$ (đọc: $A$ hợp $B$), là tập hợp gồm tất cả các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập hợp đó.

**Lưu ý:** Tổng quát hơn, ta xét một họ các tập hợp $\{A_i\}$ trong đó chỉ số $i$ chạy trên một tập hợp $I$ nào đó. Khi đó hợp và giao của các tập hợp $A_i$ cũng được định nghĩa tương tự như trên và được kí hiệu lần lượt là $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ và $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$.

Đặc biệt, nếu $I \equiv \mathbb{N}$ thì ta thường kí hiệu hợp và giao của các tập hợp $A_i$ lần lượt là $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ và $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

**c) Phép lấy hiệu:** Hiệu của hai tập hợp $A$ và $B$, kí hiệu $A\backslash B$ (đọc: $A$ trừ $B$), là tập hợp gồm tất cả các phần tử thuộc $A$ nhưng không thuộc $B$.

Thông thường các tập hợp được xét là các tập con của một tập toàn thể $X$ nào đó. Khi đó hiệu $X\backslash A$ còn được gọi là *phần bù* của $A$ (trong $X$) và được kí hiệu lại là $A^c$. Trong trường hợp này, rõ ràng ta có

$$A\backslash B = A \cap B^c.$$

**Ví dụ 1.1.2** *Cho các tập hợp* $A = \{1, 3, 4, 6, 8\}, B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. *Khi đó* $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$, $A \cap B = \{4, 6, 8\}$, $A\backslash B = \{1, 3\}$ *và* $B\backslash A = \{2, 10\}$.

### 1.1.3 Các tính chất cơ bản của các phép toán

Với các tập hợp $A, B, C$ và họ các tập hợp $\{A_i\}$ tùy ý, ta luôn có các tính chất sau:

**a) Tính giao hoán:**

$$A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A.$$

**b) Tính kết hợp:**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

**c) Tính phân phối:**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

**d) Tính chất đối ngẫu De Morgan:**

$$(\bigcup_i A_i)^c = \bigcap_i (A_i)^c;$$

$$(\bigcap_i A_i)^c = \bigcup_i (A_i)^c.$$

Tính chất này có thể phát biểu như sau: *Phần bù của một hợp bằng giao của các phần bù; phần bù của một giao bằng hợp của các phần bù.*

### 1.1.4 Tích Descartes

Cho hai tập hợp $A$ và $B$. Ta gọi *tích Descartes* của hai tập hợp $A, B$ theo thứ tự đó, kí hiệu $A \times B$, là tập hợp gồm tất cả các cặp có thứ tự $(a, b)$, trong đó $a \in A$ và $b \in B$. Như vậy

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Tổng quát, tích Descartes của $n$ tập hợp $A_1, A_2, ..., A_n$ theo thứ tự đó là tập hợp, kí hiệu $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$, gồm tất cả các bộ có thứ tự $(a_1, a_2, ..., a_n)$, trong đó $a_k \in A_k, 1 \leq k \leq n$. Đặc biệt, nếu tất cả các $A_k$ đều bằng tập $A$ nào đó thì ta viết $A \times A \times ... \times A$ là $A^n$.

## 1.2 MỆNH ĐỀ

### 1.2.1 Khái niệm mệnh đề

Trong toán học, các mệnh đề, thường được kí hiệu bởi các chữ cái in thường $p, q, r, ...$, là các khẳng định chỉ nhận một trong hai giá trị logic: đúng hoặc sai. Nếu mệnh đề $p$ nhận giá trị đúng, ta viết $p \equiv 1$; còn nếu mệnh đề $p$ nhận giá trị sai, ta viết $p \equiv 0$. Nếu hai mệnh đề $p$ và $q$ có cùng giá trị logic thì ta viết $p \equiv q$.

**Ví dụ 1.2.1** *Cho $p$ là mệnh đề: 17 là số nguyên tố, còn $q$ là mệnh đề: $\sqrt{2}$ là số hữu tỷ. Khi đó $p \equiv 1$ và $q \equiv 0$.*

### 1.2.2 Các phép toán logic cơ bản trên mệnh đề

Cho các mệnh đề $p, q$. Khi đó ta có các phép toán logic cơ bản sau đây:

**a) Phép hội:** Hội của $p$ và $q$, kí hiệu bởi $p \wedge q$ và đọc là $p$ và $q$, là mệnh đề đúng khi và chỉ khi $p, q$ đều đúng. Nói cách khác

$$p \wedge q \equiv 1 \iff p \equiv q \equiv 1.$$

**b) Phép tuyển:** Tuyển của $p$ và $q$, kí hiệu bởi $p \vee q$ và đọc là $p$ hoặc $q$, là mệnh đề sai khi và chỉ khi $p, q$ đều sai. Nói cách khác

$$p \vee q \equiv 0 \iff p \equiv q \equiv 0.$$

**c) Phép suy ra:** Mệnh đề $p$ suy ra $q$, kí hiệu bởi $p \Rightarrow q$ và đọc là nếu $p$ thì $q$, là mệnh đề sai khi và chỉ khi $p$ đúng và $q$ sai. Nói cách khác

$$p \Rightarrow q \equiv 0 \iff p \equiv 1, q \equiv 0.$$

**Lưu ý:** với mệnh đề $p \Rightarrow q$, ta cũng nói $p$ là đủ để có $q$ và $q$ là cần để có $p$.

**d) Phép tương đương:** Mệnh đề $p$ tương đương $q$, kí hiệu bởi $p \iff q$ và đọc là $p$ nếu và chỉ nếu $q$, là mệnh đề đúng khi và chỉ khi $p, q$ cùng đúng hoặc cùng sai.

**e) Phép phủ định:** Phủ định của $p$, kí hiệu bởi $\bar{p}$ và đọc là không $p$, là mệnh đề đúng khi và chỉ khi $p$ sai. Nói cách khác

$$\bar{p} \equiv 1 \iff p \equiv 0.$$

**Lưu ý:** Khi phát biểu hoặc chứng minh các khẳng định toán học, ta thường dùng các quy tắc tương đương logic trong mệnh đề dưới đây:

**Mệnh đề 1.2.2** *Cho các mệnh đề $p, q$. Khi đó ta có:*

- $p \Rightarrow q \equiv \bar{q} \Rightarrow \bar{p} \equiv \bar{p} \vee q$.
- $\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$, $\overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$.
- $\overline{p \Rightarrow q} \equiv p \wedge \bar{q}$.

### 1.2.3 Mệnh đề phụ thuộc biến và các lượng từ

Trong toán học, ta thường làm việc với các điều kiện $P(x)$ phụ thuộc vào các phần tử $x$ trong không gian $X$ nào đó. Nếu với mỗi phần tử cố định $x \in X$, $P(x)$ luôn là một mệnh đề thì ta gọi $P(x)$ là mệnh đề phụ thuộc biến $x$. Tập các phần tử $x \in X$ thỏa mãn điều kiện $P(x)$ (tức là P(x) nhận giá trị đúng) thường được kí hiệu bởi $\{x \in X : P(x)\}$ hoặc $\{x \in X | P(x)\}$.

Khi được cho một mệnh đề $P(x)$ phụ thuộc biến $x \in X$, ta hay gặp hai trường hợp quan trọng dưới đây:

- Có ít nhất một phần tử $x \in X$ thỏa mãn $P(x)$. Khi đó ta viết $\exists x \in X : P(x)$ và đọc là: tồn tại $x$ sao cho $P(x)$.
- Mọi phần tử $x \in X$ đều thỏa mãn $P(x)$. Khi đó ta viết $\forall x \in X : P(x)$ và đọc là: với mọi $x$ đều có $P(x)$.

Các lượng từ $\exists, \forall$ tương ứng được gọi là *lượng từ tồn tại, lượng từ phổ dụng*. Khi đặt một lượng từ trước một mệnh đề phụ thuộc một biến, ta thu được một mệnh đề đúng hoặc sai. Ngoài ra, giữa các lượng từ có liên hệ sau đây:

- $\overline{\exists x : P(x)} \iff \forall x : \overline{P(x)}$. Nghĩa là, phủ định của mệnh đề "Tồn tại $x$ sao cho $P(x)$" là mệnh đề "Với mọi $x$ đều không có $P(x)$".
- $\overline{\forall x : P(x)} \iff \exists x : \overline{P(x)}$. Nghĩa là, phủ định của mệnh đề "Với mọi $x$ đều có $P(x)$" là mệnh đề "Tồn tại $x$ không thỏa $P(x)$".

Mệnh đề phụ thuộc nhiều biến được nghiên cứu tương tự như trường hợp một biến. Để minh họa, ta xét mệnh đề $P(x,y)$ phụ thuộc hai biến $x$ và $y$. Khi đó nếu đặt hai lượng từ theo hai biến $x, y$ trước $P(x,y)$, ta sẽ thu được một mệnh đề đúng hoặc sai. Chú ý thêm rằng thứ tự của các lượng từ là quan trọng trong mệnh đề có nhiều biến.

**Ví dụ 1.2.3** *Xét mệnh đề phụ thuộc hai biến $P(x,y)$ là "$x = y$", $x, y \in \mathbb{Q}$. Khi đó ta có*

- *Mệnh đề $(\forall x \in \mathbb{Q})(\exists y \in \mathbb{Q})$: $x = y$ là mệnh đề đúng.*
- *Mệnh đề $(\exists y \in \mathbb{Q})(\forall x \in \mathbb{Q})$: $x = y$ là mệnh đề sai.*

Ta cũng có thể dùng các dấu phẩy thay cho các dấu ngoặc trong mệnh đề có nhiều lượng từ, chẳng hạn mệnh đề $(\forall x \in \mathbb{Q})(\exists y \in \mathbb{Q})$: $x = y$ có thể được viết thành $\forall x \in \mathbb{Q}$, $\exists y \in \mathbb{Q}$: $x = y$.

Để rút ra quy tắc phủ định tổng quát, trước tiên ta thử tìm phủ định của mệnh đề sau: "$\forall x \in X$, $\exists y \in Y$: $P(x,y)$". Rõ ràng ta có

$$\overline{\forall x \in X, \exists y \in Y : P(x,y)} \equiv \exists x \in X, \overline{\exists y \in Y : P(x,y)} \equiv \exists x \in X, \forall y \in Y : \overline{P(x,y)}.$$

Tổng quát ta có:

**Quy tắc phủ định mệnh đề có nhiều lượng từ:** *Ta thay mỗi lượng từ $\exists$ bằng lượng từ $\forall$ và ngược lại, đồng thời phủ định điều kiện ràng buộc cho các biến.*

## 1.3 ÁNH XẠ

### 1.3.1 Khái niệm ánh xạ

Một ánh xạ $f$ từ tập hợp $X$ vào tập hợp $Y$ là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử $x$ của $X$ với duy nhất một phần tử gọi là $f(x)$ của $Y$. Ánh xạ này được kí hiệu là $f : X \to Y$. Tập $X$ gọi là tập nguồn hay tập xác định, tập $Y$ gọi là tập đích hay tập giá trị của ánh xạ $f$. Với mỗi $x \in X$, phần tử $f(x)$ được gọi là ảnh của $x$ qua ánh xạ $f$ hoặc giá trị của $f$ tại $x$.

Cho hai ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : X \to Y$. Ta nói *hai ánh xạ đó là bằng nhau*, kí hiệu $f = g$, nếu $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in X$.

**Ví dụ 1.3.1** *1. Phép bình phương các số tự nhiên $f_1$ là một ánh xạ từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{N}$.*

2. *Cho trước một số nguyên tố $p$. Quy tắc $f_2$ cho tương ứng mỗi số nguyên với tổng của $p$ và số nguyên đó là một ánh xạ từ $\mathbb{Z}$ vào $\mathbb{Z}$.*

3. *Quy tắc $f_3$ cho tương ứng mỗi số tự nhiên với số các ước số nguyên dương của nó là một ánh xạ từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{N}$.*

4. *Quy tắc cho tương ứng mỗi số tự nhiên với các ước số nguyên dương của nó không phải là một ánh xạ vì vi phạm tính duy nhất của ảnh trong định nghĩa ánh xạ.*

### 1.3.2 Ảnh và ảnh ngược

Cho ánh xạ $f : X \to Y$, $A$ là tập con của $X$, $B$ là tập con của $Y$. Ta định nghĩa

- $f(A) := \{f(x) : x \in A\} = \{y \in Y : \exists x \in A, y = f(x)\}$ là *ảnh của $A$ bởi $f$*.
- $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$ là *ảnh ngược của $B$ bởi $f$*.

Nếu tập $B$ chỉ có đúng một phần tử, chẳng hạn $B = \{b\}$ thì ta sẽ viết $f^{-1}(b)$ thay cho $f^{-1}(\{b\})$ và gọi $f^{-1}(b)$ là ảnh ngược của $b$ bởi $f$. Rõ ràng $f^{-1}(b) = \{x \in X : f(x) = b\}$.

**Ví dụ 1.3.2** *Xét ánh xạ $f_1$ trong Ví dụ 1.3.1. Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5\}$. Khi đó $f_1(A) = \{1, 4, 9, 16\}$ và $f_1^{-1}(B) = \varnothing$.*

**Ví dụ 1.3.3** *Cho ánh xạ $f : X \to Y$, $B, C$ là các tập con tùy ý của $Y$. Chứng minh rằng: $f^{-1}(B\backslash C) = f^{-1}(B)\backslash f^{-1}(C)$.*

**Lời giải:** Ta có $x \in f^{-1}(B\backslash C) \iff f(x) \in (B\backslash C) \iff f(x) \in B \wedge f(x) \notin C \iff x \in f^{-1}(B) \wedge x \notin f^{-1}(C) \iff x \in f^{-1}(B)\backslash f^{-1}(C)$.
Vậy $f^{-1}(B\backslash C) = f^{-1}(B)\backslash f^{-1}(C)$.

$\square$

### 1.3.3 Đơn ánh-toàn ánh-song ánh

Cho ánh xạ $f : X \to Y$.

- Ánh xạ $f$ được gọi là *đơn ánh* nếu $\forall x, x' \in X, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ (hoặc tương đương $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$).

- Ánh xạ $f$ được gọi là *toàn ánh* nếu $f(X) = Y$, tức là $\forall y \in Y, \exists x \in X : y = f(x)$.
- Ánh xạ $f$ được gọi là *song ánh* nếu nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.

**Ví dụ 1.3.4** *Xét lại các ánh xạ ở Ví dụ 1.3.1.*

*- $f_1$ là đơn ánh vì với hai số tự nhiên $m, n$ tùy ý, $n^2 = m^2 \Rightarrow n = m$. Tuy nhiên $f_1$ không là toàn ánh vì $f_1(\mathbb{N})$ là tập con thực sự của $\mathbb{N}$.*

*- Dễ thấy $f_2$ là song ánh.*

*- Rõ ràng $f_3$ không phải là đơn ánh vì $f_3(2) = f_3(3) = 2$. Tuy nhiên $f_3$ là toàn ánh vì với số tự nhiên $n$ bất kỳ, ta có $f_3(2^{n-1}) = n$.*

### 1.3.4 Ánh xạ ngược

Cơ sở để định nghĩa ánh xạ ngược của một song ánh là mệnh đề sau:

**Mệnh đề 1.3.5** *Cho ánh xạ $f : X \to Y$. Khi đó hai khẳng định sau là tương đương:*

*(i) $f$ là một song ánh.*

*(ii) Với mọi phần tử $y$ trong $Y$, tồn tại duy nhất một phần tử $x$ trong $X$ sao cho $y = f(x)$.*

**Chứng minh:** $(i) \Rightarrow (ii)$. Giả sử $f$ là song ánh. Khi đó do $f$ là toàn ánh nên với mọi phần tử $y \in Y$, đều tồn tại một phần tử $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Rõ ràng phần tử $x$ này là duy nhất vì nếu có một phần tử $x' \neq x$ sao cho $f(x') = y$ thì ta suy ra $f(x) = f(x')$. Điều này trái với giả thiết $f$ là đơn ánh.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Theo (ii) ta có ngay $f$ là toàn ánh. Xét $x, x'$ tùy ý trong $X$ sao cho $f(x) = f(x')$. Đặt $y = f(x) = f(x')$ và sử dụng tính duy nhất trong giả thiết (ii) ta dễ dàng suy ra $x = x'$. Nói cách khác, $f$ là đơn ánh. Vậy $f$ là song ánh.

□

Theo mệnh đề trên nếu $f : X \to Y$ là song ánh thì có duy nhất một ánh xạ, kí hiệu $f^{-1}$, sao cho $f^{-1} : Y \to X$ và $\forall y \in Y, \forall x \in X,\ f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$. Ta gọi $f^{-1}$ là *ánh xạ ngược* của $f$. Dễ thấy ánh xạ $f^{-1}$ cũng là song ánh.

**Ví dụ 1.3.6** *Xét song ánh $f_2$ ở Ví dụ 1.3.1. Ta có $f_2^{-1}(k) = m \iff k = f_2(m) = p + m \iff m = k - p$. Vậy $f_2^{-1}(k) = k - p$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$.*

### 1.3.5 Ánh xạ hợp-Ánh xạ thu hẹp

**a) Ánh xạ hợp:** Cho các ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$. Khi đó ta gọi ánh xạ hợp (hoặc ánh xạ tích) của $g$ và $f$, kí hiệu $g \circ f$, là ánh xạ sao cho $g \circ f : X \to Z$ và $(g \circ f)(x) = g[f(x)], \forall x \in X$.

**b) Ánh xạ thu hẹp:** Cho ánh xạ $f : X \to Y$, $A \subset X$. Ta gọi thu hẹp của $f$ trên $A$, kí hiêu $f|_A$, là ánh xạ sao cho $f|_A : A \to Y$ và $f|_A(x) = f(x), \forall x \in A$.

$\square$

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 1

1) Chứng minh các tính chất đã nêu ở mục 1.1.3.

2) Cho các tập hợp $A, B, C$. Chứng minh:

a) $A \cap (B \backslash A) = \varnothing$ b) $A \cup (B \backslash A) = A \cup B$ c) $(A \cap B) \cup (A \backslash B) = A$

d) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$

e) $A^c \cap B^c = B^c$ và $B \subset A$ khi và chỉ khi $A = B$.

3) Cho $A, B$ là các tập con của $X$ và $C, D$ là các tập con của $Y$. Chứng minh:

a) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.

b) $(A \times C) \cup (A \times D) = A \times (C \cup D)$.

c)* $(A \times C) \cup (B \times D) \subset (A \cup B) \times (C \cup D)$. Cho ví dụ chỉ đẳng thức không xảy ra.

4) Bằng cách lập bảng giá trị logic 0 và 1, hãy chứng minh Mệnh đề 1.2.2.

5) Xét $p, q$ là các mệnh đề trong Ví dụ 1.2.1. Hãy phát biểu và xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau đây: $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \Rightarrow q$, $\bar{p}$, $\bar{p} \Rightarrow q$, $p \iff q$.

6) Trong các phát biểu dưới đây, phát biểu nào là mệnh đề. Hãy nêu tính đúng, sai của từng mệnh đề.

a) $\forall k \in \mathbb{Z} : k^2 - k \geq 0$. b) $\forall z \in \mathbb{Z}, \exists r \in \mathbb{Q} : z^2 - rz + r \geq 1$.

c) Tồn tại một hành tinh có khối lượng lớn hơn Trái Đất.

d) Tất cả các con chó có đôi cánh đều có bộ lông màu trắng.

e)* Với mọi số nguyên không âm $x, y, z$, nếu $x^{2015} + y^{2015} = z^{2015}$ thì $x + y \geq z$.

7) Cho ánh xạ $f : X \to Y$. Giả sử $A_1, A_2$ là các tập con của $X$ còn $B_1, B_2$ là các tập con của $Y$. Chứng minh

a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$; $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

b) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$; $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

c) Nếu $f$ đơn ánh thì $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

8)* Cho ánh xạ $f : X \to Y$. Khi đó các phát biểu a) và b) là tương đương:

a) $f$ đơn ánh.

b) Với mọi tập con $A$ của $X$, ta đều có $A = f^{-1}(f(A))$.

Các phát biểu c) và d) cũng tương đương:

c) $f$ là toàn ánh.

d) Với mọi tập con $B$ của $Y$, ta đều có $B = f(f^{-1}(B))$.

9) Cho các ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$. Chứng minh:

a) Nếu $g \circ f$ là đơn ánh thì $f$ là đơn ánh.

b) Nếu $g \circ f$ là toàn ánh thì $g$ là toàn ánh.

c) Nếu $f$ và $g$ song ánh thì $g \circ f$ cũng song ánh. Khi đó các ánh xạ $f$, $g$, $g \circ f$ đều có các ánh xạ ngược thỏa mãn tính chất sau: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

10) Cho các ánh xạ $f, g : X \to X$ sao cho $f \circ g$ là song ánh. Chứng minh rằng $f$ đơn ánh khi và chỉ khi $g$ toàn ánh.

# Chương 2

# TẬP HỢP SỐ THỰC

## 2.1 TIÊN ĐỀ HÓA TẬP HỢP SỐ THỰC

Tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ là một tập hợp trên đó có:

- Một phép toán cộng $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cho tương ứng mỗi cặp số thực $(x, y)$ với một số thực $x + y$.
- Một phép toán nhân $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cho tương ứng mỗi cặp số thực $(x, y)$ với một số thực $x \cdot y$.
- Một quan hệ thứ tự $\leq$ trên $\mathbb{R}$.

Ngoài ra, các phép toán cộng, phép toán nhân và quan hệ thứ tự nêu trên thỏa mãn các tiên đề sau đây.

### 2.1.1 Các tiên đề đại số

Tập hợp $\mathbb{R}$ cùng với hai phép toán cộng và nhân lập thành một *trường đại số*. Nói một cách cụ thể, hai phép toán đó thỏa mãn các tiên đề như sau.

1. Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y = y + x$. (Tính giao hoán)
2. Với mọi $x, y$ và $z$, $(x + y) + z = x + (y + z)$. (Tính kết hợp)
3. Tồn tại phần tử $0 \in \mathbb{R}$ sao cho với mọi $x \in \mathbb{R}$, $0 + x = x$. (Phần tử đơn vị)
4. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, tồn tại $y \in \mathbb{R}$ sao cho $x + y = 0$. (Phần tử nghịch đảo)

   **Nhận xét 2.1.1** *Chú ý rằng*

   *a) Phần tử 0 trong tiên đề 3 là duy nhất vì nếu có $a \in \mathbb{R}$ thỏa $a + x = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $0 = a + 0 = 0 + a = a$. Ta gọi 0 là phần tử đơn vị của phép toán cộng.*

*b) Đối với mỗi $x$ cho trước, phần tử $y$ trong tiên đề 4 là duy nhất vì nếu có $y' \in \mathbb{R}$ thỏa $x+y'=0$ thì $y=0+y=(x+y')+y=(y'+x)+y=y'+(x+y)=y'+0=y'$. Khi đó $y$ được gọi là phần tử nghịch đảo của $x$ qua phép toán cộng, kí hiệu $y=-x$.*

*c) Ta định nghĩa phép toán trừ $-$ như sau: $y-x := y+(-x)$.*

5. Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, $x \cdot y = y \cdot x$. (Tính giao hoán)
6. Với mọi $x, y$ và $z$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$. (Tính kết hợp)
7. Tồn tại phần tử $1 \neq 0$ sao cho với mọi $x \in \mathbb{R}$, $1 \cdot x = x$. (Phần tử đơn vị)
8. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, tồn tại $y \in \mathbb{R}$ sao cho $x \cdot y = 1$. (Phần tử nghịch đảo)

**Nhận xét 2.1.2** *Chú ý rằng*

*a) Phần tử 1 trong tiên đề 7 là duy nhất vì nếu có $a \in \mathbb{R}$ thỏa $a \cdot x = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $1 = a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. Ta gọi 1 là phần tử đơn vị của phép toán nhân.*

*b) Đối với mỗi $x \neq 0$ cho trước, phần tử $y$ trong tiên đề 8 là duy nhất vì nếu có $y' \in \mathbb{R}$ thỏa $x \cdot y' = 1$ thì $y = 1 \cdot y = (x \cdot y') \cdot y = (y' \cdot x) \cdot y = y' \cdot (x \cdot y) = y' \cdot 1 = y'$. Khi đó $y$ được gọi là phần tử nghịch đảo của $x$ qua phép toán nhân, kí hiệu $y = x^{-1}$ hay $y = 1/x$.*

*c) Ta định nghĩa phép toán chia / như sau: $y/x := y \cdot x^{-1}$.*

Để liên kết phép cộng và phép nhân, ta cần một tiên đề đảm bảo rằng phép nhân phân phối đối với phép cộng.

9. Với mọi $x, y$ và $z$, $x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.

Thông thường nếu không sợ nhầm lẫn, ta hay viết $xy$ thay cho $x \cdot y$.

**Mệnh đề 2.1.3** *a) Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta đều có $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$.*
*b) Cho $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó $xy = 0 \iff x = 0 \vee y = 0$.*

**Chứng minh:** a) Đặt $a = 0 \cdot x$, ta có:

$$a = 0 \cdot x = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x = a + a.$$

Do đó $0 = a + (-a) = a + a + (-a) = a + [a + (-a)] = a + 0 = a$. Tính giao hoán cho ta $x \cdot 0 = 0$ .

b) Chiều đảo của mệnh đề cần chứng minh là đúng do a). Ngược lại, giả sử ta có $xy = 0$ và cả $x$ và $y$ đều khác 0. Khi đó

$$xy = 0 \Rightarrow x^{-1}xy = x^{-1}0 \Rightarrow 1y = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Điều này mâu thuẫn với $y \neq 0$. Vậy phải có $x = 0$ hoặc $y = 0$ khi $xy = 0$.

□

### 2.1.2 Các tiên đề thứ tự

Cho hai số thực $x$ và $y$ tùy ý. Ta định nghĩa $x \leq y$ (đọc là: $x$ nhỏ hơn hoặc bằng $y$, cũng có thể đọc là $y$ lớn hơn hoặc bằng $x$ và viết là $y \geq x$) nếu $0 \leq y - x$. Quan hệ thứ tự "$\leq$" này thỏa mãn các tiên đề sau đây.

10. Với mọi số thực $x, y$, ta có $x \leq y$ hoặc $y \leq x$. Nếu xảy ra đồng thời $x \leq y$ và $y \leq x$ thì $x = y$.

11. Với mọi số thực $x, y$, nếu $0 \leq x$, $0 \leq y$ thì $0 \leq x + y$ và $0 \leq xy$.

Trường số thực $\mathbb{R}$ cùng với các tiên đề thứ tự nêu trên sẽ lập thành một *trường được sắp thứ tự toàn phần*. Ta chứng minh được các tính chất cơ bản sau đây.

**Định lý 2.1.4** *Giả sử $x, y$ và $z$ là các số thực tùy ý. Khi đó ta có:*

*a) Nếu $x \leq y$ và $y \leq z$ thì $x \leq z$.*

*b) $x \leq y$ nếu và chỉ nếu $x + z \leq y + z$.*

*c) Nếu $x \leq y$ và $0 \leq z$ thì $xz \leq yz$.*

**Chứng minh:** a) Ta viết $z - x = (z - y) + (y - x)$ và chú ý là do giả thiết $0 \leq z - y$ và $0 \leq y - x$. Áp dụng tiên đề 11 ta suy ra $0 \leq z - x$, tức là $x \leq z$.

b) Chú ý là $(y + z) - (x + z) = y - x$.

c) Ta viết $yz - xz = (y - x)z$ rồi áp dụng tiên đề 11 cho hai số $y - x$ và $z$.

□

Trong trường hợp $x \leq y$ và $x \neq y$ thì ta ghi là $x < y$ (đọc là $x$ nhỏ hơn $y$, cũng đọc là $y$ lớn hơn $x$ và viết là $y > x$) và có một quan hệ thứ tự chặt "$<$". Hiển nhiên $x < y \iff 0 < y - x$. Ta gọi $x$ là *số dương* nếu $0 < x$ và $x$ là *số âm* nếu $x < 0$. Quan hệ $<$ có các tính chất tương tự như $\leq$.

**Định lý 2.1.5** *a) Với mọi số thực $x, y$, chỉ có duy nhất một trong ba khả năng sau xảy ra: $x < y$, $x = y$ hoặc $y < x$.*

*b) Với mọi số thực $x, y$, nếu $0 < x$, $0 < y$ thì $0 < x + y$ và $0 < xy$.*

**Chứng minh:** a) Trước tiên ta chứng minh rằng với mọi số thực $x, y$, một trong ba khả năng sau là xảy ra: $x < y$, $x = y$ hoặc $y < x$. Thật vậy, theo tiên đề 10 ta luôn có $x \leq y$ hoặc $y \leq x$. Do đó nếu $x \neq y$ thì ta suy ra $x < y$ hoặc $y < x$. Trường hợp còn lại rõ ràng là $x = y$.

Mặt khác nếu có hai trong ba khả năng đó xảy ra đồng thời thì hai khả năng $x < y$ và $x = y$ không thể đồng thời xảy ra được. Tương tự hai khả năng $y < x$ và $x = y$ cũng không thể đồng thời xảy ra được. Vậy $x < y$ và $y < x$ phải đồng thời xảy ra. Tuy nhiên khi đó ta suy ra $x \leq y$ và $y \leq x$, rồi áp dụng tiên đề 10 ta được $x = y$ (mâu thuẫn với $x < y$). Vậy với mọi số thực $x, y$, chỉ có duy nhất một trong ba khả năng sau xảy ra: $x < y$, $x = y$ hoặc $y < x$.

b) Theo tiên đề 11, ta suy ra ngay: nếu $0 < x$, $0 < y$ thì $0 \leq x + y$ và $0 \leq xy$.

Nếu $x + y = 0$ thì $y = -x$. Do $0 < y$ nên $0 < -x$. Chú ý rằng $x < 0 \iff 0 < -x$ nên ta sẽ có $0 < x$ và $x < 0$ đồng thời xảy ra (mâu thuẫn với phần a) ở trên). Vậy phải có $0 < x + y$.

Nếu $xy = 0$ thì theo Mệnh đề 2.1.3 ta suy ra $x = 0$ hoặc $y = 0$, mâu thuẫn với giả thiết $0 < x$ và $0 < y$. Vậy phải có $0 < xy$.

□

Một hệ quả trực tiếp của Định lý 2.1.5 là kết quả sau:

**Hệ quả 2.1.6** *Giả sử $x, y$ và $z$ là các số thực tùy ý. Khi đó ta có:*

*a) Nếu $x < y$ và $y < z$ thì $x < z$.*

*b) $x < y$ nếu và chỉ nếu $x + z < y + z$.*

*c) Nếu $x < y$ và $0 < z$ thì $xz < yz$. Nếu $x < y$ và $z < 0$ thì $yz < xz$.*

Đến đây xuất hiện một câu hỏi thú vị là: Liệu phần tử 0 và 1 có so sánh được với nhau hay không? Ví dụ sau cho câu trả lời khẳng định.

**Ví dụ 2.1.7** *Chứng minh rằng:* $0 < 1$.

**Lời giải:** Theo phần a) của Định lý 2.1.5 và do $0 \neq 1$ nên ta chỉ có hai khả năng: hoặc $0 < 1$, hoặc $1 < 0$. Nếu xảy ra $1 < 0$ thì theo phần c) của Hệ quả 2.1.6 ta suy ra $0 \cdot 1 < 1 \cdot 1$ hay $0 < 1$. Vậy hai khả năng $1 < 0$ và $0 < 1$ xảy ra đồng thời, mâu thuẫn với phần a) của Định lý 2.1.5. Nói cách khác phải có $0 < 1$.

□

Sử dụng các tiên đề đại số và các tiên đề thứ tự nêu trên, ta có thể chứng minh các tính chất đại số hay thứ tự khác trên $\mathbb{R}$.

**Ví dụ 2.1.8** *Cho $x, y$ và $z$ là các số thực. Chứng minh rằng:*

*a) $x^2 \geq 0$.*

*b) $0 < x \iff 0 < x^{-1}$.*

*c) Nếu $0 < z$ thì $x < y \iff xz < yz$.*

**Lời giải:** a) Theo tiên đề 10, ta có $0 \leq x$ hoặc $x \leq 0$. Nếu $0 \leq x$ thì áp dụng tiên đề 11 ta suy ra $0 \leq xx = x^2$. Nếu $x \leq 0$ thì $0 \leq -x$. Áp dụng tiên đề 11 ta suy ra $0 \leq (x)(-x)$. Chú ý là $(-x)(-x) = xx = x^2$ (xem bài tập 1 cuối chương). Vậy ta cũng có $0 \leq x^2$ nếu $x \leq 0$.

b) Nếu $0 < x$ thì $x \neq 0$, do đó $x^{-1}$ tồn tại. Ta có $x^{-1} = xx^{-1}x^{-1} = x(x^{-1})^2$. Do $0 < x$ và $0 \leq (x^{-1})^2$ nên theo tiên đề 11 ta suy ra $0 \leq x^{-1}$. Dễ thấy $x^{-1} \neq 0$ (do $xx^{-1} = 1$). Vậy $0 < x^{-1}$.

Đảo lại, nếu $0 < x^{-1}$ thì theo phần thuận vừa chứng minh, ta suy ra $0 < (x^{-1})^{-1} = x$.

c) Giả sử $0 < z$. Khi đó áp dụng phần c) của Hệ quả 2.1.6 ta có ngay: $x < y \Rightarrow xz < yz$.

Đảo lại, nếu $xz < yz$ thì cũng theo phần c) của Hệ quả 2.1.6 ta có $xzz^{-1} < yzz^{-1}$ (do $0 < z$ nên $0 < z^{-1}$). Suy ra $x < y$.

□

Các tập hợp sau rất thường gặp trong $\mathbb{R}$.

**Định nghĩa 2.1.9** *Một tập con $I$ của $\mathbb{R}$ được gọi là một* **khoảng** *nếu nó có một trong các dạng dưới đây với $a$ và $b$ là các số thực nào đó.*

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$; $\quad [a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$;
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$; $\quad (a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$;
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$; $\quad (-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$;
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$; $\quad (-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$;
- $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$.

Trong phần tiếp theo, ta sẽ chỉ ra rằng tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ có thể được "nhúng" vào tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ theo nghĩa có một đơn ánh từ $\mathbb{Q}$ vào $\mathbb{R}$ sao cho đơn ánh này bảo toàn các phép cộng, phép nhân và quan hệ thứ tự trên $\mathbb{Q}$. Do đó ta sẽ xem $\mathbb{Q}$ như là một tập con của $\mathbb{R}$.

Ta xét ánh xạ $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $r \mapsto r \cdot 1$, $1 \in \mathbb{R}$, xác định bởi

$$r \cdot 1 = \begin{cases} 0, & \text{khi } r = 0 \\ \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ lần}} = n1, & \text{khi } r = n \in \mathbb{N} \\ \underbrace{(-1) + (-1) + \cdots + (-1)}_{(-m) \text{ lần}} = m1, & \text{khi } r = n \in \mathbb{Z} \backslash (\mathbb{N} \cup \{0\}) \\ (m1)(n1)^{-1}, & \text{khi } r = \frac{m}{n}, n \neq 0, m, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Nhận xét 2.1.10** *a) Từ cách xác định ánh xạ như trên, ta dễ dàng chứng minh kết quả sau: với mọi số nguyên $m$ và $n$ ta luôn có $(m1)(n1) = (mn)1$ và $m1 + n1 = (m + n)1$.*

*b) Nếu $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, trong đó $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ và $n, q \neq 0$ thì $(m1)(n1)^{-1} = (p1)(q1)^{-1}$, tức là quy tắc $f$ đúng là một ánh xạ. Thật vậy, ta có $(m1)(n1)^{-1} = (p1)(q1)^{-1} \iff (m1)(n1)^{-1}(n1)(q1) = (p1)(q1)^{-1}(n1)(q1) \iff (m1)(q1) = (p1)(n1) \iff (mq)1 = (np)1$ (đúng do $mq = np$).*

**Mệnh đề 2.1.11** *Ánh xạ $f$ xác định như trên có các tính chất sau: Với mọi $r, s \in \mathbb{Q}$*

*a)* $f(r+s) = f(r) + f(s)$,

*b)* $f(rs) = f(r)f(s)$,

*c) Nếu* $r < s$ *thì* $f(r) < f(s)$.

**Chứng minh:** a) Giả sử $r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{p}{q}$. Khi đó $r + s = \frac{mq+np}{nq}$. Do đó

$$\begin{aligned}
f(r+s) = f(r) + f(s) &\iff [(mq+np)1][(nq)1]^{-1} = (m1)(n1)^{-1} + (p1)(q1)^{-1} \\
&\iff (mq+np)1 = (m1)(n1)^{-1}(nq)1 + (p1)(q1)^{-1}(nq)1 \\
&\iff (mq+np)1 = (m1)(q1) + (p1)(n1) \text{ (do phần a) của Nhận xét 2.1.10)} \\
&\iff (mq+np)1 = (mq)1 + (np)1 = (mq+np)1 \text{ (do phần a) của Nhận xét 2.1.10).}
\end{aligned}$$

b) Chứng minh tương tự như a).

c) Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{p}{q}$ và các số $n, q \in \mathbb{N}$. Nếu $r < s$ thì $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$ hay $mq < np$. Suy ra $1 + mq \le np$ và $np = mq + k$ với $k$ là một số tự nhiên. Mặt khác do $0 < n1$ và $0 < q1$ nên

$$\begin{aligned}
f(r) < f(s) &\iff (m1)(n1)^{-1} < (p1)(q1)^{-1} \\
&\iff (m1)(n1)^{-1}(n1)(q1) < (p1)(q1)^{-1}(n1)(q1) \\
&\iff (m1)(q1) < (n1)(p1) \iff (mq)1 < (np)1 \\
&\iff (mq)1 < (mq+k)1 \iff 0 < k1.
\end{aligned}$$

Chú ý rằng bất đẳng thức cuối cùng là đúng vì $k$ là một số tự nhiên. Vậy nếu $r < s$ thì $f(r) < f(s)$.

□

**Định nghĩa 2.1.12 (Giá trị tuyệt đối của một số thực)** *Cho số thực $x$. Khi đó giá trị tuyệt đối của $x$, kí hiệu $|x|$, được định nghĩa như sau:*

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ nếu } x \ge 0 \\ -x, \text{ nếu } x < 0. \end{cases}$$

Ta có các tính chất sau đây.

**Mệnh đề 2.1.13** *Cho $x, y$ là các số thực tùy ý. Khi đó ta có*

- $|x| \ge 0$ *và* $|x| = 0 \iff x = 0$.
- $-|x| \le x \le |x|$.
- $|x + y| \le |x| + |y|$ **(bất đẳng thức tam giác)**.
- $||x| - |y|| \le |x - y|$.

- $|xy| = |x||y|$ *và* $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.
- $|x| < y \iff -y < x < y$. *Tương tự* $|x| \le y \iff -y \le x \le y$.

**Chứng minh:** Xem như bài tập.

### 2.1.3 Tiên đề về tính đầy đủ của tập số thực

Để có thể phát biểu tiên đề về tính đầy đủ, trước hết ta cần một số các khái niệm sau.

**Định nghĩa 2.1.14** *Cho $E$ là một tập con của $\mathbb{R}$.*

*a) $E$ được gọi là* **bị chặn trên** *nếu có một số thực $M$ sao cho $x \le M$ với mọi $x \in E$. Khi đó ta nói $E$ bị chặn trên bởi $M$ và $M$ là một* **cận trên** *của $E$.*

*b) $E$ được gọi là* **bị chặn dưới** *nếu có một số thực $m$ sao cho $m \le x$ với mọi $x \in E$. Khi đó ta nói $E$ bị chặn dưới bởi $m$ và $m$ là một* **cận dưới** *của $E$.*

*c) $E$ được gọi là* **bị chặn** *nếu nó vừa bị chặn trên và vừa bị chặn dưới.*

**Ví dụ 2.1.15** *a) Theo định nghĩa, tập hợp $E = [0, 1]$ là bị chặn trên bởi 1 và bị chặn dưới bởi 0. Vậy $E$ bị chặn trong $\mathbb{R}$.*

*b) Tập hợp $E = [0, \infty)$ là bị chặn dưới bởi 0 nhưng không bị chặn trên. Vì nếu $[0, \infty)$ bị chặn trên bởi một số thực $M$ nào đó thì nói riêng $0 \le M$. Do đó $M + 1 \in [0, \infty)$. Vậy ta phải có $M + 1 \le M$, mà điều này thì tương đương với $1 \le 0$ (vô lý).*

*c) Tương tự tập hợp $E = (-\infty, 0]$ là bị chặn trên bởi 0 nhưng không bị chặn dưới (tại sao?).*

*d) Tập hợp $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ không bị chặn trên, cũng không bị chặn dưới (tại sao?).*

**Định nghĩa 2.1.16** *Cho $E$ là một tập con của $\mathbb{R}$.*

*a) Ta nói $a \in E$ là* **phần tử nhỏ nhất** *của $E$, kí hiệu $a = \min E$, nếu $a \le x$ với mọi $x \in E$. Tương tự, ta nói $a \in E$ là* **phần tử lớn nhất** *của $E$, kí hiệu $a = \max E$, nếu $x \le a$ với mọi $x \in E$.*

*b) Phần tử nhỏ nhất trong tập hợp tất cả các cận trên của $E$ (nếu có) được gọi là* **cận trên đúng** *của $E$, kí hiệu $\sup E$.*

*c) Phần tử lớn nhất trong tập hợp tất cả các cận dưới của $E$ (nếu có) được gọi là* **cận dưới đúng** *của $E$, kí hiệu $\inf E$.*

**Ví dụ 2.1.17** *Cho $E$ là một tập con của $\mathbb{R}$.*

*a) Giả sử tồn tại $a = \max E$. Chứng minh rằng $\sup E$ cũng tồn tại và $\sup E = \max E = a$.*

*b) Giả sử tồn tại $a = \min E$. Chứng minh rằng $\inf E$ cũng tồn tại và $\inf E = \min E = a$.*

**Lời giải:** a) Theo định nghĩa, $a = \max E$ thuộc $E$ và là một cận trên của $E$. Ta sẽ chứng minh $a$ là cận trên nhỏ nhất trong các cận trên của $E$, do đó $\sup E = a$. Thật vậy, lấy $b$ là một cận trên tùy ý của $E$, chú ý rằng $a \in E$ nên $a \leq b$.

b) Chứng minh tương tự phần a)

$\square$

**Ví dụ 2.1.18** *Cho $E = \{1, 3, 5, 7\}$. Theo trên, ta có $\sup E = \max E = 7$ và $\inf E = \min E = 1$.*

**Ví dụ 2.1.19** *Cho $E = [0, 1)$. Rõ ràng, ta có $\inf E = \min E = 0$. Dễ thấy $E$ không có phần tử lớn nhất (tại sao?), tuy nhiên $\sup E = 1$. Thật vậy, với mọi $x$ thuộc $[0, 1)$ thì $x < 1$. Suy ra $x \leq 1$, tức 1 là một cận trên của $[0, 1)$.*

*Lấy $M$ là một cận trên bất kì của $E$. Nếu $M < 1$ thì ta suy ra $0 \leq M < \frac{M+1}{2} < 1$. Do đó $\frac{M+1}{2} \in E$ và $\frac{M+1}{2} \leq M$, mâu thuẫn với $M < \frac{M+1}{2}$. Vậy ta phải có $1 \leq M$.*

$\square$

Mệnh đề sau cho ta một đặc trưng đơn giản nhưng rất hữu dụng của các cận trên đúng và cận dưới đúng.

**Mệnh đề 2.1.20** *Cho $E$ là một tập con khác rỗng của $\mathbb{R}$ và $a \in \mathbb{R}$ là một cận trên của $E$. Khi đó, hai khẳng định sau là tương đương.*

*(i)* $a = \sup E$.

*(ii)* *Với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $x \in E$ sao cho $a - \epsilon < x \leq a$.*

*Tương tự, cho $E$ là một tập con khác rỗng của $\mathbb{R}$ và $b \in \mathbb{R}$ là một cận dưới của $E$. Khi đó, hai khẳng định sau là tương đương.*

*(iii)* $b = \inf E$.

*(iv)* *Với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $x \in E$ sao cho $b \leq x < b + \epsilon$.*

**Chứng minh:** Xem bài tập 7 cuối chương.

$\square$

Tiên đề sau đây là tiên đề rất quan trọng trong Giải tích. Tiên đề này cho ta tính đầy đủ của trường số thực, một tính chất mà trường các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ không có. Rất nhiều các định lý, các kết quả sâu sắc sau này trong Giải tích, chẳng hạn như Định lý về sự hội tụ của các dãy Cauchy, Định lý Bolzano-Weierstrass về các dãy bị chặn, Định lý giá trị trung gian của các hàm số liên tục ..., đều là hệ quả của tính chất đầy đủ của $\mathbb{R}$.

**12. Tiên đề đầy đủ (còn được gọi là Nguyên lý Supremum):** Trường các số thực $\mathbb{R}$ là đầy đủ theo nghĩa: Mọi tập con $E$ khác rỗng bị chặn trên của $\mathbb{R}$ đều có cận trên đúng thuộc $\mathbb{R}$.

**Định lý 2.1.21** *Mọi tập con $E$ khác rỗng bị chặn dưới của $\mathbb{R}$ đều có cận dưới đúng thuộc $\mathbb{R}$.*

**Chứng minh:** Giả sử $E$ bị chặn dưới bởi $a$. Đặt $-E = \{-x : x \in E\}$ thì $-E$ khác rỗng và bị chặn trên bởi $-a$. Theo tiên đề đầy đủ, $-E$ có một cận trên đúng là $b$. Ta dễ dàng kiểm tra $-b$ sẽ là cận dưới đúng của $E$.

□

Như vậy là ta đã hoàn thành công việc tiên đề hóa tập hợp các số thực. Toàn bộ các tiên đề nêu trên sẽ làm $\mathbb{R}$ trở thành một trường được sắp thứ tự toàn phần và đầy đủ. Hơn nữa, các nhà toán học còn chứng minh được rằng nếu có một trường $F$ cũng được sắp thứ tự toàn phần và đầy đủ, tức là $F$ cũng thỏa mãn các tiên đề 1-12, thì $F$ tương đương với $\mathbb{R}$, theo nghĩa là sẽ có một song ánh giữa hai trường này, và song ánh này bảo toàn các tính chất của các phép toán cộng, phép toán nhân và quan hệ thứ tự.

## 2.2 Một số kết quả quan trọng

### 2.2.1 Các nguyên lý cơ bản trên tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$

**Định lý 2.2.1 (Nguyên lý sắp thứ tự tốt)**
*Mọi tập con $E$ khác rỗng của $\mathbb{N}$ đều có phần tử nhỏ nhất.*

**Chứng minh:** Do $E$ khác rỗng nên có một số tự nhiên $N \in E$.
Đặt $F = \{n \in E : n \leq N\}$ thì $F$ khác rỗng và chỉ có hữu hạn các phần tử. Do đó $F$ sẽ có phần tử nhỏ nhất gọi là $k$. Khi đó $k$ cũng là phần tử nhỏ nhất của $E$. Thật vậy, lấy $n$ bất kì trong $E$. Nếu $n \in F$ thì $n \geq k$, còn nếu $n \notin F$ thì $n > N \geq k$.

□

**Định lý 2.2.2** *Cho $E \subset \mathbb{N}$ thỏa mãn hai tính chất sau:*

*(i)* $1 \in E$*;*

*(ii) Với mỗi* $n \in \mathbb{N}$, *nếu* $n \in E$ *thì* $n + 1 \in E$.

*Khi đó* $E = \mathbb{N}$.

**Chứng minh:** Gọi $E^c$ là phần bù của $E$ trong $\mathbb{N}$, tức là $E^c = \{n \in \mathbb{N} : n \notin E\}$. Ta sẽ chứng minh $E^c$ là tập rỗng. Thật vậy, giả sử ngược lại $E^c$ khác rỗng. Khi đó, theo Nguyên lý sắp thứ tự tốt thì $E^c$ có phần tử nhỏ nhất gọi là $N$. Chú ý rằng do $1 \in E$ nên $N \geq 2$. Rõ ràng khi đó $N - 1 \in E$ vì nếu $N - 1 \in E^c$ thì $N - 1 \geq N$ (vô lý). Tuy nhiên từ $N - 1 \in E$ và theo giả thiết (ii) ta lại suy ra $N \in E$, mâu thuẫn với $N \in E^c$.

□

**Nhận xét 2.2.3** *a) Trong định lý trên, nếu ta giữ nguyên giả thiết (i) và thay giả thiết (ii) bởi giả thiết (ii') sau*

*(ii') Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, nếu $\{1, 2, ..., n\} \subset E$ thì $n + 1 \in E$,*

*thì kết luận vẫn là $E = \mathbb{N}$ (tại sao?). Nguyên lý tương ứng được gọi là* **Nguyên lý quy nạp mạnh**.

*b) Trong định lý trên, nếu ta giữ nguyên giả thiết (ii) và thay giả thiết (i) bởi giả thiết (i') sau*

*(i') $N \in E$ với $N$ là số tự nhiên cho trước,*

*thì kết luận sẽ là $\{n \in \mathbb{N} : n \geq N\} \subset E$ (tại sao?).*

**Ví dụ 2.2.4 (Bất đẳng thức Bernoulli)**

*Chứng minh rằng: Với mọi $a \geq -1$, với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có $(1 + a)^n \geq 1 + na$.*

**Chứng minh:** Lấy $a \geq -1$ tùy ý. Đặt $E = \{n \in \mathbb{N} : (1 + a)^n \geq 1 + na\}$.
Rõ ràng ta có $1 \in E$. Giả sử ta có $n \in E$, tức là $(1 + a)^n \geq 1 + na$. Khi đó

$$(1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n(1 + a) \geq (1 + na)(1 + a) = 1 + (n + 1)a + na^2.$$

Suy ra $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a$ (do $na^2 \geq 0$) hay $n + 1 \in E$. Tức là $E$ thỏa mãn hai giả thiết của Nguyên lý quy nạp, nên $E = \mathbb{N}$.

□

**Ví dụ 2.2.5** *Chứng minh rằng: $n! > 2^n$, với mọi số tự nhiên $n \geq 4$.*

**Chứng minh:** Ta có thể chứng minh tương tự như Ví dụ 2.2.4 bằng cách đặt $E = \{n \in \mathbb{N}, n \geq 4 : n! > 2^n\}$. Tuy nhiên, ta thường thực hành như sau.

- **Kiểm tra bước cơ sở:** Với $n = 4$ thì $4! = 24 > 2^4 = 16$ nên bất đẳng thức cần chứng minh đúng với $n = 4$.
- **Chứng minh bước quy nạp:** Giả sử bất đẳng thức đúng với $n$ ($n \geq 4$), tức là ta có $n! > 2^n$ (giả thiết quy nạp). Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với $n + 1$. Thật vậy ta có

$$\begin{aligned}(n + 1)! = n!(n + 1) &> 2^n(n + 1) \,(\text{do giả thiết quy nạp}) \\ &> 2^{n+1} \,(\text{vì } n + 1 > 2).\end{aligned}$$

- **Kết luận:** Bất đẳng thức $n! > 2^n$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 4$.

□

Các định lý ở phần tiếp theo là những hệ quả của Nguyên lý Supremum.

**Định lý 2.2.6** $\mathbb{N}$ *không bị chặn trên.*

**Chứng minh:** Giả sử ngược lại $\mathbb{N}$ bị chặn trên. Khi đó theo Nguyên lý Supremum, tồn tại $a = \sup \mathbb{N}$. Suy ra $a - 1$ không phải là cận trên của $\mathbb{N}$, do đó có một số tự nhiên $n$ sao cho $n > a - 1$. Khi đó $n + 1 > a$, mâu thuẫn với $a = \sup \mathbb{N}$.

□

**Định lý 2.2.7 (Nguyên lý Archimedes)**
*Với mọi $a > 0$, với mọi $b \in \mathbb{R}$, tồn tại $n \in \mathbb{N}$: $na > b$.*

**Chứng minh:** Dùng phản chứng, giả sử ngược lại, nếu có $a > 0$, có $b \in \mathbb{R}$ sao cho với mọi $n \in \mathbb{N} : na \leq b$. Khi đó với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có $n \leq b/a$, mâu thuẫn với $\mathbb{N}$ không bị chặn trên.

□

**Ví dụ 2.2.8** *Cho $E = \{x = 1 - 1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Tìm $\sup E$.*

**Lời giải:** Rõ ràng nếu $x \in E$ thì $x \leq 1$. Vậy 1 là cận trên của $E$. Ta sẽ áp dụng Mệnh đề 2.1.20 để chứng minh $\sup E = 1$. Lấy $\epsilon > 0$ tùy ý, ta cần chỉ ra tồn tại $x = 1 - 1/n > 1 - \epsilon$. Điều này tương đương với có $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n > 1/\epsilon$. Chú ý rằng số $n$ như vậy tồn tại theo Nguyên lý Archimedes ứng với $a = \epsilon, b = 1$.

□

### 2.2.2 Các tính chất cơ bản của tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$

Trước tiên ta sẽ chỉ ra rằng có những số thực nhưng không phải là số hữu tỉ. Nói cách khác, $\mathbb{Q}$ là tập con thực sự của $\mathbb{R}$. Do đó, phần bù $\mathbb{Q}^c$ của $\mathbb{Q}$ trong $\mathbb{R}$ là khác rỗng và $\mathbb{Q}^c$ được gọi là *tập hợp các số vô tỉ.*

**Mệnh đề 2.2.9** *Tồn tại duy nhất một số thực $x > 0$ sao cho $x^2 = 2$. Số $x$ đó được gọi là căn bậc hai của 2, kí hiệu $\sqrt{2}$.*

**Chứng minh:** Dễ thấy tính duy nhất của $x$ là đúng vì nếu có $y > 0$ sao cho $y^2 = 2$ thì $x^2 = y^2$. Suy ra $(x - y)(x + y) = 0$, do đó $x = y$ (vì $x + y > 0$).
Để chứng minh sự tồn tại của số $x$ như trên, ta đặt $E = \left\{s > 0 : s^2 \leq 2\right\}$. Rõ ràng $E$ khác rỗng (do $1 \in E$) và bị chặn trên bởi 2 chẳng hạn. Theo Nguyên lý Supremum, tồn tại số thực $x = \sup E$. Dễ thấy $x \geq 1$, ta sẽ chứng minh $x^2 = 2$.

- Xét trường hợp $x^2 > 2$. Theo Nguyên lý Archimedes, ta có số tự nhiên $n$ sao cho $n > \frac{2x}{x^2-2}$. Khi đó với mọi $s \in E$, ta có

  $$(x - 1/n)^2 = x^2 - 2x/n + 1/n^2 > x^2 - 2x/n > 2 \geq s^2$$

  do cách chọn $n$. Suy ra $x - 1/n > s$, tức là $x - 1/n$ là một cận trên của $E$, mâu thuẫn với $x = \sup E$.

- Xét trường hợp $x^2 < 2$. Theo Nguyên lý Archimedes, ta có số tự nhiên $m$ sao cho $m > \frac{2x+1}{2-x^2}$. Khi đó

  $$(x + 1/m)^2 = x^2 + 2x/m + 1/m^2 \leq x^2 + \frac{2x+1}{m} < 2$$

  do cách chọn $m$. Suy ra $x + 1/m$ thuộc $E$, mâu thuẫn với $x = \sup E$.

Vậy phải có $x^2 = 2$.

□

**Mệnh đề 2.2.10** $\sqrt{2}$ *không phải là số hữu tỉ.*

**Chứng minh:** Giả sử ngược lại rằng tồn tại số hữu tỉ $r = m/n$ ở dạng tối giản (tức là ước số chung lớn nhất của $m$ và $n$ là 1) sao cho $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$. Suy ra $m^2 = 2n^2$. Khi đó $m^2$ chia hết cho 2, do đó $m$ cũng chia hết cho 2 (tại sao?). Vậy $m = 2k$ với $k$ là số nguyên nào đó. Thay $m = 2k$ vào đẳng thức $m^2 = 2n^2$, ta suy ra $n^2 = 2k^2$. Lập luận tương tự như trên, ta suy ra $n = 2l$ với $l$ là số nguyên nào đó. Vậy cả $m$ và $n$ đều chia hết cho 2, điều này là mâu thuẫn với giả thiết $r = m/n$ ở dạng tối giản.

□

**Định lý 2.2.11 (Tính trù mật của $\mathbb{Q}$ trong $\mathbb{R}$)**
*Cho $a, b$ là các số thực bất kì và $a < b$. Khi đó, tồn tại $r \in \mathbb{Q}$ sao cho $a < r < b$.*

**Chứng minh:** Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử là $1 < a < b$ (trường hợp tổng quát thay $a, b$ bởi $a + n, b + n$ với $n \in \mathbb{N}$ được chọn sao cho $1 < a + n$).

Theo Nguyên lý Archimedes, ta chọn $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n > 1/(b - a)$ hay $1/n < b - a$. Cố định số $n$ này và đặt $E = \{k \in \mathbb{N} : k > na\}$ thì $E$ khác rỗng do Nguyên lý Archimedes. Theo Nguyên lý sắp thứ tự tốt của $\mathbb{N}$, $E$ có một phần tử nhỏ nhất gọi là $m$ và $m > na > 1$. Khi đó

$$m - 1 \leq na \Rightarrow \frac{m-1}{n} \leq a \Rightarrow \frac{m}{n} \leq a + \frac{1}{n} < b$$

do cách chọn $n$. Vậy $r = m/n$ là số hữu tỉ sao cho $a < r < b$.

□

**Định lý 2.2.12 (Tính trù mật của $\mathbb{Q}^c$ trong $\mathbb{R}$)**
*Cho $a, b$ là các số thực bất kì và $a < b$. Khi đó, tồn tại $x \in \mathbb{Q}^c$ sao cho $a < x < b$.*

**Chứng minh:** Theo Định lý 2.2.11, có số hữu tỉ $r$ sao cho $a < r < b$. Xét $x = r + \frac{\sqrt{2}}{n}$ với $n \in \mathbb{N}$ được chọn sao cho $n > \frac{\sqrt{2}}{b-r}$. Khi đó $x \in \mathbb{Q}^c$ và $a < x < b$.

□

**Ví dụ 2.2.13** *Cho $E = \left\{r \in \mathbb{Q} : 0 < r < \sqrt{2}\right\}$. Chứng minh rằng:* $\sup E = \sqrt{2}$.

**Lời giải:** Theo định nghĩa của $E$, ta có ngay $\sqrt{2}$ là một cận trên của $E$. Giả sử $M$ là một cận trên của $E$, ta cần chứng minh $M \geq \sqrt{2}$. Thật vậy, giả sử $M < \sqrt{2}$. Khi đó, theo Định lý 2.2.11 về tính trù mật của $\mathbb{Q}$, tồn tại một số hữu tỉ $r$ sao cho $M < r < \sqrt{2}$. Suy ra $r \in E$ và $M < r$, mâu thuẫn với $M$ là một cận trên của $E$.
Vậy $\sup E = \sqrt{2}$.

□

**Chú ý:** Ví dụ 2.2.13 cũng chỉ ra rằng $\mathbb{Q}$ không thỏa mãn tiên đề đầy đủ (Nguyên lý Supremum).

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 2

1) Sử dụng các tiên đề từ 1-9, chứng minh rằng với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ ta có

a) $-x = (-1)x$  b) $-(-x) = x$  c) $(-1)(-1) = 1$  d) $(-x)(-y) = xy$

2) Trong tiên đề 7, giải thích tại sao ta cần điều kiện $1 \neq 0$.

3) Chứng minh rằng: a) Nếu $a \leq c$ và $b \leq d$ thì $a + b \leq c + d$.

b) Nếu $0 \leq a \leq c$ và $0 \leq b \leq d$ thì $ab \leq cd$.

4) Chứng minh rằng: nếu $a \geq 0$ và $b \geq 0$ thì $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$.

5) Chứng minh rằng: $0 < a < b \iff 0 < b^{-1} < a^{-1}$.

6) Chứng minh rằng tập hợp các số phức $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ là một trường không được sắp thứ tự toàn phần. (Hướng dẫn: Xét $i > 0$ và $i < 0$.)

7) Chứng minh Mệnh đề 2.1.20.

8) Cho $A$ và $B$ là các tập con khác rỗng và bị chặn của $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu $A \subset B$ thì $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

9) Cho $E$ là tập con khác rỗng và bị chặn trên của $\mathbb{R}$. Gọi $F$ là tập hợp tất cả các cận trên của $E$. Chứng minh rằng $\inf F = \sup E$.

10) Cho $S, T$ là các tập con khác rỗng và bị chặn của $\mathbb{R}$, và một số thực $r$. Đặt $rS = \{rs : s \in S\}$ và $S + T = \{s + t : s \in S, t \in T\}$. Chứng minh rằng:

a) Nếu $r \geq 0$ thì $\sup(rS) = r \sup S$ và $\inf(rS) = r \inf S$.

b) Nếu $r < 0$ thì $\sup(rS) = r \inf S$ và $\inf(rS) = r \sup S$.

c) $\sup(S + T) = \sup S + \sup T$ và $\inf(S + T) = \inf S + \inf T$.

11) Tìm $\min A$, $\max A$, $\inf A$, $\sup A$ (nếu có) trong đó:

a) $A = \{\sin x : x \in \mathbb{R}\}$  b) $A = \left\{2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

c) $A = \left\{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 1 < 0\right\}$  d) $A = \left\{2 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

e) $A = \left\{x = \frac{m}{2^n + 1} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$  f) $A = \left\{x = a + \frac{1}{a} : a \in \mathbb{Q}^c, a > 0\right\}$

12) Dùng các Nguyên lý quy nạp toán học, chứng minh:

a) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) $\sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^i i^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

d) $\prod\limits_{i=2}^{n} (1 - \frac{1}{i^2}) = \frac{n+1}{2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

e) Nếu $r + \frac{1}{r}$ là một số nguyên thì $r^n + \frac{1}{r^n}$ cũng là số nguyên, $\forall n \in \mathbb{N}$.

f)* Khai triển của đa thức $(1 + x + x^2)^n$ có ít nhất một hệ số trước $x$ là số chẵn, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. (Hướng dẫn: Chú ý đến 4 số hạng có bậc thấp nhất của $(1+x+x^2)^n$, sử dụng đồng dư theo modulo 2 nếu cần thiết)

13) Dùng Nguyên lý quy nạp toán học, chứng minh các bất đẳng thức sau đây:

a) **Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:**

Cho các số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ bất kì. Khi đó ta có

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2.$$

b)* **Bất đẳng thức Cauchy (còn gọi là bất đẳng thức AM-GM):**

Cho các số dương $a_1, a_2, ..., a_n$ bất kì. Khi đó ta có

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

(Hướng dẫn câu b): Tại bước quy nạp, giả sử bất đẳng thức đúng cho $n$ số tùy ý, chứng minh bất đẳng thức đúng cho $2n$ số tùy ý trước rồi dùng kết quả này để chứng minh bất đẳng thức đúng cho $n+1$ số tùy ý).

14) a) Chứng minh rằng: nếu $E$ là tập con khác rỗng bị chặn dưới của $\mathbb{Z}$ thì $E$ có phần tử nhỏ nhất.

b) Chứng minh rằng: với mọi số thực $x$, tồn tại duy nhất một số nguyên $k$ sao cho $x - 1 < k \leq x$ (ta gọi số nguyên $k$ đó là *phần nguyên của* $x$, kí hiệu [x]).

15) Chứng minh các số sau là các số vô tỷ: $\sqrt{3}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ và $\log_2 3$.

16) Chứng minh rằng nếu $a, b$ và $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ thuộc $\mathbb{Q}$ thì $\sqrt{a}$ và $\sqrt{b}$ cũng thuộc $\mathbb{Q}$.

17)* Cho $n$ là một số tự nhiên. Chứng minh rằng: với mọi số thực $a \geq 0$, tồn tại duy nhất một số thực $b \geq 0$ sao cho $b^n = a$ (ta gọi số thực $b$ đó là *căn bậc* $n$ *của* $a$, kí hiệu $\sqrt[n]{a}$). (Hướng dẫn: Đặt $E = \{x \geq 0 : x^n \leq a\}$, theo Nguyên lý Supremum thì có $b = \sup E$ rồi chứng minh $b^n = a$. Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli nếu cần thiết.)

# Chương 3

# GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

## 3.1 CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

### 3.1.1 DÃY SỐ

**Định nghĩa 3.1.1** *Một ánh xạ $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ được gọi là một dãy số (thực). Ta thường viết $x(n) = x_n$ và kí hiệu dãy số như trên bởi $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ hoặc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hoặc đơn giản bởi $(x_n)$. Ta gọi $x_n$ là số hạng thứ n (hoặc số hạng tổng quát) của dãy số đó.*

Một số ví dụ về dãy số:

- $(n) = 1, 2, 3, \ldots$ Số hạng tổng quát $x_n = n$.
- $(\frac{1}{n}) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ Số hạng tổng quát $x_n = \frac{1}{n}$.
- $((-1)^n) = -1, 1, -1, 1 \ldots$ Số hạng tổng quát $x_n = (-1)^n$.
- $(1) = 1, 1, 1, \ldots$ Số hạng tổng quát $x_n = 1$. Dãy số này được gọi là dãy số hằng.

### 3.1.2 DÃY SỐ ĐƠN ĐIỆU

**Định nghĩa 3.1.2** *Cho dãy số $(x_n)$.*

- *Dãy số $(x_n)$ được gọi là dãy số tăng nếu $x_n \le x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Dãy số $(x_n)$ được gọi là dãy số tăng ngặt nếu $x_n < x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.*
- *Dãy số $(x_n)$ được gọi là dãy số giảm nếu $x_n \ge x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Dãy số $(x_n)$ được gọi là dãy số giảm ngặt nếu $x_n > x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.*
- *Các dãy số tăng và dãy số giảm được gọi chung là dãy số đơn điệu.*

**Ví dụ 3.1.3** *Dãy số* $(n) = 1, 2, 3, \ldots$ *là dãy số tăng ngặt. Dãy số* $(\frac{1}{n}) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ *là dãy số giảm ngặt. Dãy số* $((-1)^n)$ *là dãy số không tăng và cũng không giảm.*

### 3.1.3 DÃY SỐ BỊ CHẶN

**Định nghĩa 3.1.4** *Cho dãy số* $(x_n)$*.*

- *Dãy số* $(x_n)$ *được gọi là bị chặn trên nếu có số thực* $M$ *sao cho* $x_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$*.*
- *Dãy số* $(x_n)$ *được gọi là bị chặn dưới nếu có số thực* $m$ *sao cho* $m \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$*.*
- *Dãy số* $(x_n)$ *được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.*

**Ví dụ 3.1.5** *Dãy số* $(n)$ *là dãy số bị chặn dưới nhưng không bị chặn trên theo Nguyên lý Archimedes.*
*Các dãy số* $(\frac{1}{n})$ *và* $((-1)^n)$ *là các dãy số bị chặn.*

### 3.1.4 DÃY SỐ HỘI TỤ

**Định nghĩa 3.1.6** *Dãy số* $(x_n)$ *hội tụ về một số thực* $a$ *nếu với mọi số thực* $\epsilon > 0$*, tồn tại một số tự nhiên* $N$ *sao cho với mọi* $n \geq N$ *ta có* $|x_n - a| < \epsilon$*.*
*Khi đó ta nói* $(x_n)$ *là dãy số hội tụ, ta gọi* $a$ *là giới hạn của dãy* $(x_n)$ *và viết* $\lim x_n = a$ *(*$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *khi cần làm rõ) hoặc* $x_n \to a$ *khi* $n \to +\infty$*.*

$$\boxed{\lim x_n = a \iff \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon.}$$

**Nhận xét 3.1.7** *Giới hạn của một dãy số hội tụ* $(x_n)$ *là duy nhất. Thật vậy giả sử ta có đồng thời* $\lim x_n = a$ *và* $\lim x_n = b$ *với* $a, b$ *là các số thực. Khi đó với* $\epsilon > 0$ *tùy ý, tồn tại các số tự nhiên* $N_1$ *và* $N_2$ *sao cho* $|x_n - a| < \epsilon, \forall n \geq N_1$ *và* $|x_n - b| < \epsilon, \forall n \geq N_2$*. Từ đó ta suy ra:*

$$|a - b| = |a - x_{N_1+N_2} + x_{N_1+N_2} - b| \leq |a - x_{N_1+N_2}| + |x_{N_1+N_2} - b| < 2\epsilon.$$

*Vì* $\epsilon > 0$ *tùy ý nên bất đẳng thức trên cho ta* $a = b$*.*

**Ví dụ 3.1.8** *Chứng minh:* $\lim \frac{1}{n} = 0$.

**Lời giải:** Lấy $\epsilon > 0$ tùy ý. Theo Nguyên lý Archimedes, tồn tại một số tự nhiên $N$ sao cho $\frac{1}{N} < \epsilon$. Khi đó với mọi $n \geq N$, ta có

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon.$$

□

**Ví dụ 3.1.9** *Chứng minh dãy số* $((-1)^n)$ *không hội tụ.*

**Lời giải:** Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử ngược lại dãy số $(x_n = (-1)^n)$ hội tụ về một số thực $a$ nào đó. Khi đó chọn $\epsilon = 1/2$, tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - a| < 1/2$ với $n \geq N$. Suy ra $|1 - a| < 1/2$ và $|-1 - a| < 1/2$. Tuy nhiên các bất đẳng thức trên lại cho $1/2 < a < 3/2$ và $-3/2 < a < -1/2$ (vô lý).

□

**Lưu ý:** Nếu dãy số $(x_n)$ không hội tụ về một số thực nào thì ta nói **dãy số đó phân kỳ**. Trong tập hợp các dãy số phân kỳ ta xét riêng **các dãy số có giới hạn là vô cực** được định nghĩa như bên dưới.

### 3.1.5 DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN VÔ CỰC

**Định nghĩa 3.1.10**

- *Ta nói dãy số* $(x_n)$ *có giới hạn là* $+\infty$ *nếu với mọi số thực* $M > 0$*, tồn tại một số tự nhiên* $N$ *sao cho với mọi* $n \geq N$*, ta có* $x_n > M$*. Khi đó ta viết* $\lim x_n = +\infty$ *hoặc* $x_n \to +\infty$ *khi* $n \to +\infty$*.*
- *Ta nói dãy số* $(x_n)$ *có giới hạn là* $-\infty$ *nếu với mọi số thực* $M > 0$*, tồn tại một số tự nhiên* $N$ *sao cho với mọi* $n \geq N$*, ta có* $x_n < -M$*. Khi đó ta viết* $\lim x_n = -\infty$ *hoặc* $x_n \to -\infty$ *khi* $n \to +\infty$*.*

**Ví dụ 3.1.11** *Chứng minh:* $\lim n^2 = +\infty$*.*

**Lời giải:** Lấy $M > 0$ tùy ý. Theo Nguyên lý Archimedes, tồn tại số tự nhiên $N$ sao cho $N > M$. Khi đó với mọi $n \geq N$, ta có

$$n^2 \geq n \geq N > M.$$

□

## 3.2 CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN

**Định lý 3.2.1** *Mọi dãy số hội tụ đều là dãy số bị chặn.*

**Chứng minh:** Giả sử $(x_n)$ là dãy số hội tụ về số thực $a$. Với $\epsilon = 1$, ta có số tự nhiên $N$ sao cho $|x_n - a| < 1, \forall n \geq N$. Do đó

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|, \forall n \geq N.$$

Đặt $M = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_{N-1}| + 1 + |a|$ thì ta suy ra $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.
Vậy dãy $(x_n)$ là dãy bị chặn.

□

**Nhận xét 3.2.2** *Ví dụ 3.1.9 chỉ ra rằng có những dãy số bị chặn nhưng không hội tụ.*

### 3.2.1 LUẬT GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

**Định lý 3.2.3** *a)* $\lim x_n = 0 \iff \lim |x_n| = 0$.

*b) Nếu* $\lim x_n = a$ *thì* $\lim |x_n| = |a|$.

**Chứng minh:** Bài tập.

**Nhận xét 3.2.4** *Chiều ngược lại của phần b) nói chung không đúng, chẳng hạn ta xét dãy* $((-1)^n)$.

### 3.2.2 LUẬT THỨ TỰ

**Định lý 3.2.5** *Giả sử* $\lim x_n = a$ *và* $\lim y_n = b$ *với* $a, b$ *là các số thực.*

*a) Nếu* $x_n \leq y_n, \forall n \geq k$ *(*$k$ *là một số tự nhiên cho trước) thì* $a \leq b$.

*b) Với mọi* $m < a$*, tồn tại số tự nhiên* $N_m$ *sao cho* $m < x_n, \forall n \geq N_m$.

*Tương tự, với mọi* $M > a$*, tồn tại số tự nhiên* $N_M$ *sao cho* $x_n < M, \forall n \geq N_M$.

**Chứng minh:** a) Do $\lim x_n = a$ và $\lim y_n = b$ nên với $\epsilon > 0$ tùy ý, tồn tại các số tự nhiên $N_1$ và $N_2$ sao cho $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon, \forall n \geq N_1$ và $b - \epsilon < y_n < b + \epsilon, \forall n \geq N_2$. Do đó ta có

$$a - \epsilon < x_{k+N_1+N_2} \leq y_{k+N_1+N_2} < b + \epsilon.$$

Suy ra $a - \epsilon < b + \epsilon$ hay $a - b < 2\epsilon$. Vì $\epsilon > 0$ tùy ý nên $a - b \leq 0$.

b) Với $m < a$ bất kỳ, lấy $\epsilon = a - m > 0$ thì do $\lim x_n = a$ nên tồn tại số tự nhiên $N_m$ sao cho $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon, \forall n \geq N_m$. Suy ra $m < x_n, \forall n \geq N_m$.

Tương tự, với $M > a$ bất kỳ, lấy $\epsilon = M - a > 0$ thì do $\lim x_n = a$ nên tồn tại số tự nhiên $N_M$ sao cho $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon, \forall n \geq N_M$. Suy ra $x_n < M, \forall n \geq N_M$.

□

**Định lý 3.2.6 (Nguyên lý kẹp)** *Cho các dãy số* $(x_n)$, $(y_n)$ *và* $(z_n)$ *thỏa mãn các điều kiện sau:*

*(i)* $y_n \leq x_n \leq z_n, \forall n \geq k$ *(*$k$ *là một số tự nhiên cho trước).*

*(ii)* $\lim y_n = \lim z_n = a$ *(*$a \in \mathbb{R}$*).*

*Khi đó* $\lim x_n = a$.

**Chứng minh:** Do $\lim y_n = a$ và $\lim z_n = a$ nên với $\epsilon > 0$ tùy ý, tồn tại các số tự nhiên $N_1$ và $N_2$ sao cho $a - \epsilon < y_n < a + \epsilon, \forall n \geq N_1$ và $a - \epsilon < z_n < a + \epsilon, \forall n \geq N_2$. Khi đó tồn tại một số tự nhiên $N = k + N_1 + N_2$ sao cho

$$a - \epsilon < y_n \leq x_n \leq z_n < a + \epsilon, \forall n \geq N.$$

Suy ra: với $\epsilon > 0$ tùy ý, tồn tại một số tự nhiên $N$ sao cho $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon, \forall n \geq N$. Nói cách khác, ta có $\lim x_n = a$.

□

**Ví dụ 3.2.7** *Chứng minh:* $\lim \frac{\sin n}{n} = 0$.

**Lời giải:** Với mọi số tự nhiên $n$, ta luôn có:

$$0 \leq |\frac{\sin n}{n}| \leq \frac{1}{n}.$$

Vì dãy $(0)$ và dãy $(1/n)$ đều hội tụ về 0 nên theo Nguyên lý kẹp ta suy ra $\lim \left|\frac{\sin n}{n}\right| = 0$ và do đó $\lim \frac{\sin n}{n} = 0$.

### 3.2.3 LUẬT SỐ HỌC

**Định lý 3.2.8** *Giả sử* $\lim x_n = a$ *và* $\lim y_n = b$ *với* $a, b$ *là các số thực. Khi đó ta có*

*a)* $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n = a + b$.

*b)* $\lim(x_n y_n) = \lim x_n \lim y_n = ab$.

*c) Nếu* $b \neq 0$ *và* $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ *thì* $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n} = \frac{a}{b}$.

**Chứng minh:** Định lý sẽ được chứng minh trong giờ lý thuyết.

□

**Lưu ý:** Định lý 3.2.5 và Định lý 3.2.8 vẫn đúng khi $\lim x_n = a$ và $\lim y_n = b$ với $a, b$ là các số thực mở rộng trong $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ miễn là các phép toán có sự tham gia của $\pm\infty$ phải xác định. Sau đây là các quy ước khi làm việc với các số thực mở rộng (để đơn giản ta viết $\infty$ thay cho $+\infty$).

1) $\infty + \infty = \infty \cdot \infty = (-\infty)(-\infty) = \infty$.

2) $-\infty - \infty = (-\infty)\infty = \infty(-\infty) = -\infty$.

3) Cho $x$ là một số thực tùy ý. Khi đó

a) $-\infty < x < \infty$.

b) $\infty + x = x + \infty = \infty$.

c) $-\infty + x = x - \infty = -\infty$.

d) Nếu $x > 0$ thì $\infty \cdot x = x \cdot \infty = \infty$ và $(-\infty) \cdot x = x \cdot (-\infty) = -\infty$.

e) Nếu $x < 0$ thì $\infty \cdot x = x \cdot \infty = -\infty$ và $(-\infty) \cdot x = x \cdot (-\infty) = \infty$.

f) $\frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$.

4) Tuy nhiên, ta không đề cập tới các phép toán sau đây (**các dạng vô định**):

a) $-\infty + \infty$ và $\infty - \infty$.

b) $0 \cdot (\pm\infty)$ và $(\pm\infty) \cdot 0$.

c) $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

d) $\frac{x}{0}$ với $x \in \mathbb{R}$.

### 3.2.4 LUẬT NGHỊCH ĐẢO

**Định lý 3.2.9** *Cho dãy số* $(a_n)$.

*a) Nếu* $a_n > 0$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}$ *và* $\lim \frac{1}{a_n} = 0$ *thì* $\lim a_n = +\infty$.

*b) Nếu* $\lim a_n = \pm\infty$ *thì* $\lim \frac{1}{a_n} = 0$.

**Chứng minh:** Bài tập.

□

### 3.2.5 ĐỊNH LÝ HỘI TỤ ĐƠN ĐIỆU

Ta đã biết một dãy số hội tụ thì phải là dãy số bị chặn và chiều ngược lại nói chung không đúng. Nhà toán học người Đức Karl Weierstrass (1815-1897) đã phát hiện ra rằng một dãy số bị chặn nếu có thêm tính đơn điệu thì dãy số đó sẽ hội tụ.

**Định lý 3.2.10 (Định lý Weierstrass)** *Cho dãy số* $(a_n)$.

*a) Nếu* $(a_n)$ *là dãy tăng và bị chặn trên thì* $(a_n)$ *hội tụ và* $\lim a_n = \sup\limits_n a_n$.

*b) Nếu* $(a_n)$ *là dãy giảm và bị chặn dưới thì* $(a_n)$ *hội tụ và* $\lim a_n = \inf\limits_n a_n$.

**Chứng minh:** Ta chứng minh phần a), phần b) được chứng minh tương tự. Thật vậy, giả sử $(a_n)$ là dãy tăng và bị chặn trên. Khi đó theo Nguyên lý Supremum cho tập hợp số thực, $\sup\limits_n a_n$ tồn tại (hữu hạn). Gọi $a = \sup\limits_n a_n$.

Lúc này, với $\epsilon > 0$ tùy ý, tồn tại một $a_N$ sao cho $a - \epsilon < a_N$. Do đó với mọi $n \geq N$, ta thu được

$$a - \epsilon < a_N \leq a_n \leq a < a + \epsilon.$$

Vậy với $\epsilon > 0$ tùy ý, tồn tại một số tự nhiên $N$ sao cho với mọi $n \geq N$, ta có $a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$. Nói cách khác $\lim a_n = a = \sup\limits_n a_n$.

□

**Hệ quả 3.2.11** *a) Nếu* $(a_n)$ *là dãy tăng thì hoặc* $(a_n)$ *hội tụ hoặc* $\lim a_n = +\infty$.

*b) Nếu* $(a_n)$ *là dãy giảm thì hoặc* $(a_n)$ *hội tụ hoặc* $\lim a_n = -\infty$.

**Chứng minh:** a) Giả sử $(a_n)$ là dãy tăng. Khi đó dãy $(a_n)$ hoặc là bị chặn trên, hoặc là không bị chặn trên.

- Nếu $(a_n)$ bị chặn trên thì theo Định lý Weierstrass ta có $(a_n)$ hội tụ.

- Nếu $(a_n)$ không bị chặn trên thì với mọi $A > 0$, tồn tại một $a_N$ sao cho $a_N > A$. Khi đó với mọi $n \geq N$, ta thu được

$$a_n \geq a_N > A.$$

Vậy $\lim a_n = +\infty$.

b) Chứng minh tương tự.

□

**Ví dụ 3.2.12** *Xét sự hội tụ của dãy số $(a_n)$, trong đó*

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

**Lời giải:** Dãy đã cho bị chặn trên vì

$$a_n \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \leq 1.$$

Dãy đó là dãy tăng vì

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geq 0.$$

Vậy theo định lý Weierstrass, dãy số $(a_n)$ đã cho là dãy hội tụ.

□

**Ví dụ 3.2.13** *Cho dãy số $(a_n)$ được định nghĩa truy hồi bởi $a_1 = 2$ và*

$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}, \forall n \geq 1.$$

*Chứng minh rằng $(a_n)$ hội tụ và tìm giới hạn của nó.*

### 3.2.6 MỘT SỐ GIỚI HẠN CƠ BẢN

Sử dụng các luật về giới hạn của dãy số ở các phần trước cùng với định lý hội tụ đơn điệu, ta tìm được các giới hạn của các dãy số thường gặp sau đây.

- $\lim C = C$.
- $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ (với $k \in \mathbb{N}$).
- $\lim q^n = 0$ (với $|q| < 1$).

- $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ (với $a > 0$).
- $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.
- $\lim \frac{n^s}{a^n} = 0$ (với $a > 1$ và $s \in \mathbb{R}$).
- $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$ (với $a \in \mathbb{R}$).
- $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

## 3.3 DÃY CON-DÃY CAUCHY

### 3.3.1 DÃY CON

**Định nghĩa 3.3.1** • *Cho dãy số $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và một dãy các số tự nhiên $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sao cho $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Khi đó dãy $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ được gọi là một dãy con của dãy ban đầu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

- *Giới hạn (kể cả $\pm\infty$) của một dãy con $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ được gọi là* **giới hạn riêng** *của dãy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

**Nhận xét 3.3.2** *Bằng quy nạp ta chứng minh được $n_k \geq k$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.*

**Ví dụ 3.3.3** *Cho dãy số $(a_n)$ với $a_n = (-1)^n$.*

- *Nếu lấy $n_k = 2k$ thì ta có dãy con $(a_{n_k} = a_{2k} = 1)_{k\in\mathbb{N}} = 1, 1, 1, \ldots$.*
- *Nếu lấy $n_k = 2k-1$ thì ta có dãy con $(a_{n_k} = a_{2k-1} = -1)_{k\in\mathbb{N}} = -1, -1, -1, \ldots$.*

*Dãy này có hai giới hạn riêng là 1 và -1.*

**Định lý 3.3.4** *Dãy số $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ về số thực a nếu và chỉ nếu tất cả các dãy con $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ của nó hội tụ về a.*

**Chứng minh:** Vì $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy con của chính nó nên chiều đảo của định lý trên là hiển nhiên. Ta chỉ cần chứng minh chiều thuận. Thật vậy, với $\epsilon > 0$ tùy ý, vì $\lim a_n = a$ nên ta có một số tự nhiên $N$ sao cho

$$|a_n - a| < \epsilon, \forall n \geq N.$$

Khi đó, với mọi $k \geq N$, ta suy ra $n_k \geq k \geq N$ và

$$|a_{n_k} - a| < \epsilon, \forall k \geq N.$$

Nói cách khác, ta đã chứng minh được $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

□

Hệ quả sau đây cho ta một phương pháp để chỉ ra một dãy số nào đó không hội tụ.

**Hệ quả 3.3.5** *Giả sử dãy $(a_n)$ có hai dãy con và hai dãy này hội tụ về các giới hạn khác nhau. Khi đó $(a_n)$ là dãy phân kỳ.*

**Định lý 3.3.6** *Mọi dãy số $(a_n)$ đều có một dãy con đơn điệu (tăng hoặc giảm).*

**Chứng minh:** Với dãy $(a_n)$ ta xét tập sau đây:

$$S = \{n \in \mathbb{N} : a_m \geq a_n, \forall m > n\}.$$

Khi đó ta có hai trường hợp:

(i) $S$ có vô hạn phần tử. Ta xây dựng dãy các số tự nhiên $(n_k)$ bằng quy nạp như sau

- $n_1 = \min S$.
- $n_{k+1} = \min(S \backslash \{n_1, n_2, \ldots, n_k\})$.

Khi đó $(n_k)$ là dãy tăng ngặt và $a_{n_{k+1}} \geq a_{n_k}$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.

(ii) $S$ có hữu hạn phần tử. Khi đó tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\forall n \geq N, \exists m > n : a_m < a_n.$$

Ta xây dựng dãy các số tự nhiên $(n_k)$ bằng quy nạp như sau

- $n_1 = N$.
- $n_{k+1} = \min\{m \in \mathbb{N} : m > n_k \text{ và } a_m < a_{n_k}\}$.

Khi đó $(n_k)$ là dãy tăng ngặt và $a_{n_{k+1}} < a_{n_k}$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.

□

Một hệ quả trực tiếp của định lý trên và định lý hội tụ đơn điệu Weierstrass là kết quả rất sâu sắc sau đây. Kết quả này được chứng minh đầu tiên bởi nhà toán học Bernhard Bolzano (1781-1848) và được chỉnh sửa lại một chút sau đó bởi Karl Weierstrass.

**Định lý 3.3.7 (Định lý Bolzano-Weierstrass)** *Mọi dãy số bị chặn $(a_n)$ đều có một dãy con hội tụ.*

**Chứng minh:** Theo Định lý 3.3.6, dãy $(a_n)$ có một dãy con đơn điệu $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ nào đó. Không mất tính tổng quát ta giả sử $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ là dãy tăng. Rõ ràng $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ là dãy số bị chặn. Vậy theo định lý hội tụ đơn điệu Weierstrass, ta suy ra $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ là dãy hội tụ.

□

### 3.3.2 DÃY CAUCHY

**Định nghĩa 3.3.8** *Dãy số $(a_n)$ được gọi là* **dãy Cauchy** *nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại một số tự nhiên $N$ sao cho với mọi $n \geq N$, $m \geq N$ ta có $|a_m - a_n| < \epsilon$.*

*Một cách tương đương, dãy số $(a_n)$ được gọi là* **dãy Cauchy** *nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại một số tự nhiên $N$ sao cho với mọi $n \geq N$, với mọi $p \in \mathbb{N}$ ta có $|a_{n+p} - a_n| < \epsilon$.*

**Nhận xét 3.3.9** *Nếu $(a_n)$ là dãy Cauchy thì $(a_n)$ bị chặn. Thật vậy, chọn $\epsilon = 1$, tồn tại một số tự nhiên $N$ sao cho với mọi $n \geq N$, $m \geq N$ ta có $|a_m - a_n| < 1$. Nói riêng ta có $|a_N - a_n| < 1$ với mọi $n \geq N$. Từ đây ta thấy*

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|, \forall n \geq N.$$

*Đặt $M = 1 + |a_N| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{N-1}|$ thì với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta luôn có $|a_n| \leq M$. Tức là dãy $(a_n)$ bị chặn.*

Tiêu chuẩn dưới đây cho ta một phương pháp khác, ngoài định lý hội tụ đơn điệu Weierstrass, để chứng minh một dãy số hội tụ mà không cần biết giới hạn của dãy đó. Tiêu chuẩn này được chứng minh bởi nhà toán học người Pháp Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

**Định lý 3.3.10 (Tiêu chuẩn Cauchy)** *Dãy số $(a_n)$ là dãy hội tụ khi và chỉ khi dãy đó là dãy Cauchy.*

**Chứng minh:** Giả sử $(a_n)$ hội tụ về $a$ nào đó. Với $\epsilon > 0$ tùy ý, tồn tại số tự nhiên $N$ sao cho với mọi $n \geq N$, $|a_n - a| < \epsilon/2$. Khi đó, với mọi $n \geq N$, $m \geq N$, ta có

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Tức là, $(a_n)$ là dãy Cauchy.

Đảo lại, giả sử $(a_n)$ là dãy Cauchy. Khi đó $(a_n)$ là dãy số bị chặn. Theo định lý Bolzano-Weierstrass, $(a_n)$ có một dãy con $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ hội tụ về một số thực $a$ nào đó. Ta sẽ chứng minh dãy $(a_n)$ hội tụ về $a$. Thật vậy, với $\epsilon > 0$ tùy ý, có các số tự nhiên $N_1$ và $N_2$ sao cho

$$|a_m - a_n| < \epsilon/2, \forall m, n \geq N_1$$

và

$$|a_{n_k} - a| < \epsilon/2, \forall k \geq N_2.$$

Đặt $N = N_1 + N_2$. Khi đó, với mọi $n \geq N$, ta có

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_N} + a_{n_N} - a| \leq |a_n - a_{n_N}| + |a_{n_N} - a| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Vậy $(a_n)$ hội tụ về $a$.

□

**Ví dụ 3.3.11** *Cho* $s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$. *Dùng tiêu chuẩn Cauchy, chứng minh rằng dãy* $(s_n)$ *hội tụ.*

**Lời giải:** Với $n, p \in \mathbb{N}$ ta có

$$|s_{n+p} - s_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2}.$$

Do đó ta suy ra

$$|s_{n+p} - s_n| \le \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)}.$$

Rõ ràng vế phải của bất đẳng thức trên bằng với

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}.$$

Vậy

$$|s_{n+p} - s_n| \le \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \le \frac{1}{n}.$$

Lấy $\epsilon > 0$ tùy ý, chọn số tự nhiên $N$ sao cho $\frac{1}{\epsilon} < N$. Khi đó với mọi $n \ge N$, với mọi $p \in \mathbb{N}$ ta có

$$|s_{n+p} - s_n| \le \frac{1}{n} \le \frac{1}{N} < \epsilon.$$

Vậy dãy $(s_n)$ là dãy Cauchy và do đó là dãy hội tụ.

□

**Nhận xét 3.3.12** *Trong nhiều tài liệu về Giải tích, tính chất đầy đủ của tập các số thực* $\mathbb{R}$ *được phát biểu như sau:*

$\mathbb{R}$ **đầy đủ khi và chỉ khi mọi dãy Cauchy trong** $\mathbb{R}$ **đều hội tụ.**

*Sử dụng nguyên lý Supremum, ta đã chứng minh được tiêu chuẩn Cauchy cho các dãy số và do đó chỉ ra tính đầy đủ của* $\mathbb{R}$ *theo nghĩa như trên. Ngược lại, nếu ta có nguyên lý Archimedes trên* $\mathbb{R}$ *thì từ tính đầy đủ của* $\mathbb{R}$ *theo nghĩa như trên ta cũng có thể suy ra được nguyên lý Supremum. Nói cách khác, nguyên lý Archimedes + tính đầy đủ của* $\mathbb{R}$ *tương đương với nguyên lý Supremum.*

### 3.3.3 GIỚI HẠN TRÊN - GIỚI HẠN DƯỚI

Trong phần này ta luôn xét $(x_n)$ là dãy số bị chặn. Ta thiết lập các dãy số $(M_n)$ và $(m_n)$ sau đây

$$M_n = \sup\{x_k : k \ge n\}$$
$$m_n = \inf\{x_k : k \ge n\}.$$

Rõ ràng dãy $(M_n)$ là dãy số giảm và bị chặn dưới, còn dãy $(m_n)$ là dãy số tăng và bị chặn trên. Theo Định lý Weierstrass, các dãy $(M_n)$ và $(m_n)$ là các dãy số hội tụ.

**Định nghĩa 3.3.13** *Giới hạn của dãy $(M_n)$ và $(m_n)$ lần lượt được gọi là* **giới hạn trên** *và* **giới hạn dưới** *của dãy số $(x_n)$. Giới hạn trên và giới hạn dưới của dãy $(x_n)$ lần lượt được ký hiệu là $\limsup x_n$ và $\liminf x_n$.*
*Như vậy*

$$\limsup x_n = \lim M_n = \lim[\sup\{x_k : k \geq n\}]$$
$$\liminf x_n = \lim m_n = \lim[\inf\{x_k : k \geq n\}].$$

**Nhận xét 3.3.14** *Ta dễ dàng chứng minh các kết quả sau đây.*

*i)* $\limsup x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} M_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} x_k$ *và* $\liminf x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} x_k$.

*ii)* $\liminf x_n \leq \limsup x_n$.

**Mệnh đề 3.3.15** *Cho $(x_n)$ là dãy số bị chặn. Đặt $\liminf x_n = a$ và $\limsup x_n = b$. Khi đó ta có khẳng định sau.*

$$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : a - \epsilon < x_n < b + \epsilon, \forall n \geq N.$$

**Chứng minh:** Do $\limsup x_n = \lim M_n = b$ nên với $\epsilon > 0$ tùy ý, tồn tại $N_1 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq N_1$, ta có $b - \epsilon < M_n < b + \epsilon$. Khi đó với mọi $n \geq N_1$, ta suy ra $x_n \leq M_n < b + \epsilon$.
Lập luận tương tự với $\liminf x_n = \lim m_n = a$, ta tìm được $N_2 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq N_2$, ta có $a - \epsilon < x_n$.
Cuối cùng nếu ta lấy $N = N_1 + N_2$ thì $a - \epsilon < x_n < b + \epsilon, \forall n \geq N$.

□

**Định lý 3.3.16** *Cho $(x_n)$ là dãy số bị chặn. Khi đó $(x_n)$ hội tụ về a nếu và chỉ nếu $\liminf x_n = \limsup x_n = a$.*

**Chứng minh:** Phần đảo của định lý trên được suy ra từ Mệnh đề 3.3.15. Ta chỉ còn phải chứng minh phần thuận. Thật vậy, giả sử $(x_n)$ hội tụ về $a$. Khi đó với $\epsilon > 0$ tùy ý, tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq N$, ta có $a - \frac{\epsilon}{2} < x_n < a + \frac{\epsilon}{2}$. Do đó ta suy ra với mọi $n \geq N$, $M_n \leq a + \frac{\epsilon}{2}$. Từ kết quả này, chuyển qua giới hạn ta thu được $\limsup x_n \leq a + \frac{\epsilon}{2} < a + \epsilon$.
Lập luận tương tự như trên cho phần $\liminf x_n$, ta cũng chứng minh được $\liminf x_n > a - \epsilon$.
Vậy, chú ý là $\liminf x_n \leq \limsup x_n$, ta đã chứng minh được với $\epsilon > 0$ tùy ý

$$a - \epsilon < \liminf x_n \leq \limsup x_n < a + \epsilon.$$

Điều này có nghĩa là $\liminf x_n = \limsup x_n = a$.

□

**Ví dụ 3.3.17** *Xét dãy* $(x_n = (-1)^n)$*. Khi đó* $\liminf x_n = -1$ *và* $\limsup x_n = 1$*. Vậy theo định lý trên dãy* $((-1)^n)$ *không hội tụ.*

Trong phần tiếp theo ta sẽ chỉ ra giới hạn trên và giới hạn dưới của một dãy số lần lượt chính là giới hạn riêng lớn nhất và nhỏ nhất của dãy số đó.

**Định lý 3.3.18** *Cho* $\limsup x_n = a \in \mathbb{R}$*. Khi đó ta có các khẳng định sau.*

*i) Tồn tại một dãy con* $(x_{n_k})$ *của dãy* $(x_n)$ *sao cho* $x_{n_k} \to a$ *khi* $k \to \infty$*.*

*ii) Với mọi dãy con* $(x_{m_k})$*, nếu* $\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k} = c$ *thì* $c \leq a$*.*

*Tương tự, cho* $\liminf x_n = b \in \mathbb{R}$*. Khi đó ta có các khẳng định sau.*

*iii) Tồn tại một dãy con* $(x_{n_k})$ *của dãy* $(x_n)$ *sao cho* $x_{n_k} \to b$ *khi* $k \to \infty$*.*

*iv) Với mọi dãy con* $(x_{m_k})$*, nếu* $\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k} = c$ *thì* $c \geq b$*.*

**Chứng minh:** Ta chứng minh cho phiên bản “limsup", phiên bản “liminf" được chứng minh tương tự.

i) Ta xây dựng bằng quy nạp dãy con $(x_{n_k})$ sao cho $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$ như sau.

Chọn $n_1 = 1$. Giả sử ta đã chọn được $n_k$. Do $\limsup x_n = a$ nên có một số tự nhiên $N$ sao cho

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |M_n - a| < \frac{1}{k+1}.$$

Cố định $N$ và chọn $n = \max\{N, n_k\} + 1$. Từ định nghĩa của $M_n$, tồn tại số tự nhiên $l$ sao cho $l \geq n$ và

$$M_n - \frac{1}{k+1} \leq x_l \leq M_n.$$

Chọn $n_{k+1} = l$ thì $n_{k+1} \geq n > n_k$ và

$$|x_{n_{k+1}} - a| \leq |x_{n_{k+1}} - M_n| + |M_n - a| \leq \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} = \frac{2}{k+1}.$$

Rõ ràng với cách xây dựng như trên thì $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$ (tại sao?).

ii) Dễ thấy $c$ không thể là $+\infty$ (tại sao?). Nếu $c = -\infty$ thì hiển nhiên $c \leq a$. Ta chỉ còn phải xét trường hợp $c \in \mathbb{R}$. Nếu $c > a$ thì do $\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k} = c$ nên có số $K \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq K \Rightarrow |x_{m_k} - c| < \frac{c-a}{2}.$$

Khi đó ta suy ra

$$x_{m_k} > c - \frac{c-a}{2} = \frac{c+a}{2}, \forall k \geq K.$$

Từ kết quả trên ta suy ra $M_n = \sup\{x_k : k \geq n\} \geq \frac{c+a}{2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do đó $a \geq \frac{c+a}{2}$ hay $a \geq c$ (mâu thuẫn với $a < c$). Nói cách khác ta phải có $c \leq a$.

$\square$

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 2

1) Trong mỗi dãy số bên dưới, nếu dãy số có giới hạn là $L$ thì với $\epsilon > 0$, hãy tìm một số tự nhiên $N$ sao cho $n \geq N \Rightarrow |x_n - L| < \epsilon$.

a) $x_n = \frac{n-1}{n+1}$

b) $x_n = \frac{2n^2+1}{n^3+n}$

c) $x_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$

d) $x_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

e) $x_n = (1 - 1/2)(1 - 1/3)\cdots(1 - 1/n)$

2) Tính giới hạn của các dãy số sau.

a) $x_n = \frac{2^n+1}{3^n+2}$

b) $x_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

c) $x_n = \sqrt[n]{3^n + 4^n + 2015^n}$

d) $x_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$

e) $x_n = \frac{(n+3)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$

f) $x_n = \sqrt{3}\sqrt[4]{3}\sqrt[8]{3}\ldots\sqrt[2^n]{3}$

3) Chứng minh Luật giá trị tuyệt đối và Luật nghịch đảo trong phần 3.2.

4) Cho các ví dụ về hai dãy số $(x_n)$ và $(y_n)$ sao cho $x_n \to 0$, $y_n \to +\infty$ và thỏa mãn một trong các điều kiện bên dưới.

a) $x_n y_n \to 0$.

b) $x_n y_n \to 1$.

c) $x_n y_n \to +\infty$.

d) $(x_n y_n)$ bị chặn nhưng không hội tụ.

5) Chứng minh các kết quả về các giới hạn cơ bản trong phần 3.2.6.

6)* Chứng minh rằng nếu $\lim x_n = +\infty$ hoặc $\lim x_n = -\infty$ thì $\lim \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$.

Áp dụng kết quả trên tính giới hạn các dãy số sau.

a) $x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ $(x \in \mathbb{R})$

b) $x_n = \left(1 + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^{\sqrt{n}}$

7) Cho một số tự nhiên $p$ và dãy số $(x_n)$. Chứng minh rằng $(x_n)$ hội tụ về (một số thực) $x$ khi và chỉ khi $(x_{n+p})$ hội tụ về $x$.

8) Cho $(x_n)$ là một dãy các số thực không âm hội tụ về một số thực $x$ và cho một số tự nhiên $k$. Chứng minh rằng $\lim \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{x}$.

9) Cho $x$ là một số thực bất kỳ. Chứng minh rằng tồn tại một dãy gồm toàn các số hữu tỷ và một dãy gồm toàn các số vô tỷ sao cho cả hai dãy đó đều hội tụ về $x$.

10) Cho $E \subset \mathbb{R}$ là tập khác rỗng và bị chặn trên, và $a$ là một cận trên của $E$. Chứng minh rằng $a = \sup E$ khi và chỉ khi tồn tại một dãy $(x_n)$ trong $E$ sao cho $x_n \to a$ khi $n \to \infty$.

11) Cho $S \subset \mathbb{R}$. Chứng minh rằng các điều kiện sau là tương đương.

a) $S$ không bị chặn trên.

b) Tồn tại một dãy $(x_n)$ trong $S$ sao cho $\lim x_n = +\infty$.

12) Hãy chỉ ra các dãy số cho bởi công thức truy hồi bên dưới hội tụ. Tìm giới hạn của các dãy số đó.

a) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \forall n \geq 1$.

b) $x_1 = 5$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + 2, \forall n \geq 1$.

13)* Cho $(x_n)$ là một dãy các số thực dương sao cho $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = s$. Chứng minh rằng:

a) Nếu $s < 1$ thì $\lim x_n = 0$.

b) Nếu $s > 1$ thì $\lim x_n = +\infty$.

14) Chứng minh các dãy sau không hội tụ.

a) $x_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

b)* $x_n = \sin n$

15) Cho ví dụ của một dãy số không có dãy con nào hội tụ.

16) Cho ví dụ của hai dãy số $(x_n)$ và $(y_n)$ sao cho tập hợp $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ là tập con của $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, nhưng $(x_n)$ không là dãy con của $(y_n)$.

17) a) Chứng minh rằng nếu dãy $(x_n)$ có giới hạn là $+\infty$ thì $(x_n)$ không bị chặn trên. Chiều ngược lại có đúng không?

b) Cho dãy số $(x_n)$ không bị chặn trên. Chứng minh rằng dãy đã cho có một dãy con $(x_{n_k})$ sao cho $x_{n_k} \to +\infty$ khi $k \to \infty$.

c) Cho dãy số $(x_n)$ không bị chặn. Chứng minh rằng dãy đã cho có một dãy con $(x_{n_k})$ sao cho $1/x_{n_k} \to 0$ khi $k \to \infty$.

18)* Cho $(x_n)$ là một dãy số đơn điệu (tăng hoặc giảm). Giả sử thêm $(x_n)$ có một dãy con hội tụ. Chứng minh rằng dãy $(x_n)$ cũng hội tụ.

19) Tính $\limsup x_n$ và $\liminf x_n$ trong các trường hợp sau.

a) $x_n = \frac{n+(-1)^n(2n+1)}{n}$

b) $x_n = \cos(\frac{n\pi}{4})$

c) $x_n = n^{\sin(\frac{n\pi}{2})}$

d) $(x_n) = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \dots$

20) Cho một ví dụ về dãy số $(x_n)$ sao cho

a) $\limsup x_n = 10$ và $\liminf x_n = 0$

b) $\limsup x_n = 10$ và $\liminf x_n = -\infty$

c) $\limsup x_n = +\infty$ và $\liminf x_n = 0$

21) Cho các dãy số bị chặn $(x_n)$ và $(y_n)$. Chứng minh rằng

a) $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$

b) $\liminf(x_n + y_n) \geq \liminf x_n + \liminf y_n$

22) Dùng tiêu chuẩn Cauchy xét sự hội tụ của các dãy số sau đây.

a) $x_n = \frac{\cos 1}{2^1} + \frac{\cos 2}{2^2} + \cdots + \frac{\cos n}{2^n}$

b) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

23)* Cho dãy số $(x_n)$ và $0 < r < 1$. Giả sử

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq r|x_{n+1} - x_n|, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy số đã cho là dãy Cauchy.

Áp dụng: Tìm giới hạn của dãy cho bởi: $x_1 > 0$ và $x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n}, \forall n \geq 1$.

24)* Chứng minh định lý về dãy các đoạn thẳng lồng nhau (**the Nested Interval Theorem**) sau đây.

Cho $I_n = [a_n; b_n]$ là các khoảng trong $\mathbb{R}$ sao cho $I_{n+1} \subset I_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ khác rỗng. Ngoài ra, nếu có thêm giả thiết $\lim \ell(I_n) = 0$, với $\ell(I_n) = b_n - a_n$, thì $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ có đúng một phần tử.

**Bài tập lớn:** Chứng minh sự tương đương của nguyên lý Supremum, định lý Weierstrass, định lý Cantor về dãy các đoạn thẳng lồng nhau, định lý Bolzano-Weierstrass và tiêu chuẩn Cauchy + nguyên lý Archimedes.

# Chương 4

# GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

## 4.1 CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

### 4.1.1 LÂN CẬN

**Định nghĩa 4.1.1** *Cho* $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

- *Khi* $a \in \mathbb{R}$ *thì các tập* $V = (a - r; a + r)$ *với* $r > 0$ *được gọi là các* **lân cận** *của* $a$.
- *Khi* $a = +\infty$ *thì các tập* $V = (m; +\infty)$ *với* $m \in \mathbb{R}$ *được gọi là các* **lân cận** *của* $+\infty$.
- *Khi* $a = -\infty$ *thì các tập* $V = (-\infty; M)$ *với* $M \in \mathbb{R}$ *được gọi là các* **lân cận** *của* $-\infty$.

*Nếu* $V$ *là một lân cận của* $a$ *thì* $V \backslash \{a\}$ *được gọi là một* **lân cận thủng** *của* $a$. *Tập hợp tất cả các lân cận (thủng) của* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *được ký hiệu bởi* $\mathcal{N}_a$ ($\mathcal{N}_a^*$).

**Nhận xét 4.1.2** *(i) Cho* $V = (a - r; a + r)$ *là một lân cận của số thực* $a$. *Khi đó*

$$x \in V \iff |x - a| < r$$

*và*

$$x \in V \backslash \{a\} \iff 0 < |x - a| < r.$$

*(ii) Khi* $a = \pm\infty$ *thì* $\mathcal{N}_a = \mathcal{N}_a^*$.

### 4.1.2 ĐIỂM GIỚI HẠN

**Định nghĩa 4.1.3** *Cho* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *và tập* $E \subset \mathbb{R}$. *Ta nói* $a$ *là* **điểm giới hạn** *của* $E$ *nếu mọi* $V \in \mathcal{N}_a$ *đều thỏa* $(V \backslash \{a\}) \cap E \neq \varnothing$.

*Tập các điểm giới hạn của $E$ được ký hiệu là $\overline{E}$.*

Ta cũng có thể đặc trưng khái niệm điểm giới hạn bằng dãy số như sau.

**Định lý 4.1.4** *Cho $a \in \overline{\mathbb{R}}$ và tập $E \subset \mathbb{R}$. Khi đó $a$ là điểm giới hạn của $E$ khi và chỉ khi có một dãy số $(x_n) \subset E$ sao cho $x_n \neq a, \forall n \in \mathbb{N}$ và $\lim x_n = a$.*

**Ví dụ 4.1.5** *Cho $E = \left\{x = \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Khi đó 0 là một điểm giới hạn của $E$ vì có dãy $(x_n = \frac{1}{n} \neq 0)$ trong $E$ sao cho $\lim x_n = 0$.*

### 4.1.3 ĐIỂM CÔ LẬP

**Định nghĩa 4.1.6** *Cho $a \in E \subset \mathbb{R}$. Ta nói $a$ là* **điểm cô lập** *của $E$ nếu tồn tại $V \in \mathcal{N}_a$ sao cho $(V \backslash \{a\}) \cap E = \varnothing$.*

Rõ ràng nếu $a \in E$ và $a$ không là điểm giới hạn của $E$ thì $a$ phải là điểm cô lập của $E$.

**Ví dụ 4.1.7** *Cho $a \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ thì $a$ là điểm cô lập của $\mathbb{Z}$ vì*

$$[(a - 1/2; a + 1/2) \backslash \{a\}] \cap \mathbb{Z} = \varnothing.$$

### 4.1.4 HÀM SỐ

**Định nghĩa 4.1.8** *Một ánh xạ $f : X \to Y$ với $X, Y$ là các tập con của $\mathbb{R}$ được gọi là một hàm số. Ta thường ký hiệu tập xác định $X$ của hàm số $f$ là $D_f$ và tập giá trị $f(X)$ của $f$ là $R_f$.*

Trong các phần tiếp theo, ta luôn lấy miền xác định của một hàm số $f$ là một tập con khác rỗng của $\mathbb{R}$.

### 4.1.5 ĐỊNH NGHĨA CHUNG VỀ GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

**Định nghĩa 4.1.9** *Cho hàm số $f : X \to Y$ và $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Giả sử $a$ là một điểm giới hạn của $X$.*
*Ta nói $f(x)$ tiến về $b$ khi $x$ tiến về $a$ (hay $b$ là giới hạn của $f(x)$ khi $x$ tiến về $a$), ký hiệu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ (hay $f(x) \to b$ khi $x \to a$), nếu với mọi lân cận $V$ của $b$ đều tồn tại một lân cận thủng $U$ của $a$ sao cho $f(x) \in V$ với mọi $x \in X \cap U$.*

*Như vậy ta có*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \forall V \in \mathcal{N}_b, \exists U \in \mathcal{N}_a^* : f(X \cap U) \subset V.$$

**Nhận xét 4.1.10** *Với mỗi $a$ (hoặc $b$) ta có ba khả năng có thể xảy ra: $a \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$ hay $a = -\infty$. Do đó ta có 9 khả năng chọn ra một cặp $(a, b)$ trong định nghĩa. Ứng với từng trường hợp, Định nghĩa 4.1.9 có thể chuyển từ ngôn ngữ lân cận sang ngôn ngữ bất đẳng thức. Ta xét một số trường hợp làm ví dụ.*

- *Khi $a, b \in \mathbb{R}$ thì*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon.$$

- *Khi $a = +\infty$, $b \in \mathbb{R}$ thì*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \iff \forall\epsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \in X, x > M \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon.$$

- *Khi $a \in \mathbb{R}$, $b = +\infty$ thì*

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Ngoài ngôn ngữ lân cận hay ngôn ngữ bất đẳng thức nêu trên, giới hạn của hàm số còn có thể phát biểu qua ngôn ngữ dãy số.

**Định lý 4.1.11** *Cho hàm số $f : X \to Y$ và $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Giả sử $a$ là một điểm giới hạn của $X$. Khi đó*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \forall (x_n) \subset X\backslash\{a\}, \lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = b.$$

**Chứng minh:** Giả sử $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, tức là

$$\forall V \in \mathcal{N}_b, \exists U \in \mathcal{N}_a^* : f(X \cap U) \subset V.$$

Xét dãy số bất kỳ $(x_n) \subset X\backslash\{a\}, \lim x_n = a$, ta có $N \in \mathbb{N}$ sao cho $x_n \in X \cap U$ với mọi $n \geq N$, và do đó $f(x_n) \in V$. Nói cách khác, ta đã chứng minh $\lim f(x_n) = b$.

Đảo lại, giả sử không có $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, tức là

$$\exists V \in \mathcal{N}_b, \forall U \in \mathcal{N}_a^*, f(X \cap U) \not\subset V.$$

Khi đó ứng với mỗi $n \in \mathbb{N}$ xét

$$U = \begin{cases} (a - 1/n; a + 1/n)\backslash\{a\}, \text{ nếu } \ a \in \mathbb{R} \\ (n; +\infty), \text{ nếu } \ a = +\infty \\ (-\infty; -n), \text{ nếu } \ a = -\infty \end{cases}$$

ta tìm được $x_n \in X \cap U$ và $f(x_n) \notin V$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Rõ ràng ta có dãy $(x_n) \subset X\backslash\{a\}, \lim x_n = a$ nhưng dãy $(f(x_n))$ không có giới hạn là $b$.

□

**Hệ quả 4.1.12** *Cho hàm số $f : X \to Y$ và $a \in \overline{\mathbb{R}}$ là một điểm giới hạn của $X$. Khi đó nếu có hai dãy $(x_n)$ và $(x'_n)$ trong $X\backslash\{a\}$ cùng có giới hạn là a nhưng hai dãy tương ứng $(f(x_n))$ và $(f(x'_n))$ không có cùng giới hạn thì $f(x)$ sẽ không có giới hạn khi $x$ tiến về $a$.*

**Ví dụ 4.1.13** *Hàm số $f(x) = \sin x$ không có giới hạn khi $x$ tiến về $+\infty$ vì có hai dãy $(x_n = 2n\pi)$ và $(x'_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi)$ đều có giới hạn là $+\infty$ nhưng hai dãy $(f(x_n) = 0)$ và $(f(x'_n) = 1)$ không có cùng giới hạn.*

## 4.2 CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN

Từ Định nghĩa 4.1.9, Định lý 4.1.11 và các tính chất đã biết ở Chương 3 về giới hạn của dãy số, ta dễ dàng có được các tính chất sau đây.

**Định lý 4.2.1** *Cho các hàm số $f, g, h : X \to Y$ và $a \in \overline{\mathbb{R}}$ là một điểm giới hạn của $X$.*

*a) Nếu $f(x)$ có giới hạn khi $x \to a$ thì giới hạn đó là duy nhất.*

*b) Nếu $f(x)$ có giới hạn hữu hạn là $b \in \mathbb{R}$ khi $x \to a$ thì có một lân cận thủng $U$ của $a$ sao cho $f(x)$ bị chặn trên $U \cap X$.*

*c) Nếu $f(x) \to b$ khi $x \to a$ và $b < M$ (tương ứng $b > m$) thì có một lân cận thủng $U$ của $a$ sao cho với mọi $x \in U \cap X$ ta có $f(x) < M$ (tương ứng $f(x) > m$).*

*d) Nếu $f(x) \leq g(x)$ với mọi $x \in U \cap X$ ($U$ là một lân cận thủng nào đó của $a$) và $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b_2$ thì $b_1 \leq b_2$.*

*e)* **(Nguyên lý kẹp)** *Nếu $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ với mọi $x \in U \cap X$ ($U$ là một lân cận thủng nào đó của $a$) và $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b = \lim\limits_{x\to a} h(x)$ thì $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.*

*f) Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ thì $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |b|$. Đặc biệt $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \iff \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$.*

*g) Giả sử $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b_2$. Khi đó, với điều kiện là các phép toán ở các vế phải đều có nghĩa, ta có*

- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = b_1 + b_2$.
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)] = b_1 b_2$.
- *Nếu $b_2 \neq 0$ và có một lân cận thủng $U$ của $a$ sao cho $g(x) \neq 0$ trên $U \cap X$ thì $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_1}{b_2}$.*

Về giới hạn của hàm hợp, ta có kết quả sau đây.

**Định lý 4.2.2** *Cho các hàm số $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$ và $a$ là một điểm giới hạn của $X$. Giả sử $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ và có một lân cận thủng $U$ của $a$ sao cho $f(x) \neq$*

*$b, \forall x \in U \cap X$. Khi đó $b$ là một điểm giới hạn của $Y$. Hơn nữa, nếu $\lim\limits_{y \to b} g(y) = c$ thì $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$.*

**Chứng minh:** Lấy một dãy số bất kỳ $(x_n) \subset X \backslash \{a\}$ và $\lim x_n = a$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x_n \in U \cap X, \forall n \in \mathbb{N}$ (tại sao?). Do đó theo giả thiết, dãy $(f(x_n)) \subset Y \backslash \{b\}$ và $\lim f(x_n) = b$. Từ đó ta suy ra $b$ là điểm giới hạn của $Y$.
Mặt khác, do $\lim\limits_{y \to b} g(y) = c$ nên ta có $\lim (g \circ f)(x_n) = \lim g[f(x_n)] = c$. Vậy theo Định lý 4.1.11, ta suy ra $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$.

□

Tương tự như đối với các dãy số hội tụ, ta cũng có tiêu chuẩn sau để một hàm số có giới hạn hữu hạn khi $x \to a$ với $a$ hữu hạn, $a = +\infty$ hoặc $a = -\infty$.

**Định lý 4.2.3 (Tiêu chuẩn Cauchy)** *Cho hàm số $f : X \to Y$ và $a$ là một điểm giới hạn của $X$. Khi đó $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi $x \to a \in \mathbb{R}$ (tương ứng $a = +\infty$; hoặc $a = -\infty$) nếu và chỉ nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ (tương ứng $M > 0$) sao cho với mọi $x, x' \in X$, nếu $0 < |x - a| < \delta$ và $0 < |x' - a| < \delta$ (tương ứng $x > M$ và $x' > M$; hoặc $x < -M$ và $x' < -M$) thì ta có $|f(x) - f(x')| < \epsilon$.*

**Chứng minh:** Ta chứng minh cho trường hợp $a$ hữu hạn. Các trường hợp còn lại tương tự.
(Chiều thuận) Giả sử $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ với $b \in \mathbb{R}$. Khi đó với $\epsilon > 0$ tùy ý, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|f(x) - b| < \frac{\epsilon}{2}$ và $|f(x') - b| < \frac{\epsilon}{2}$ khi $0 < |x - a| < \delta$ và $0 < |x' - a| < \delta$. Suy ra
$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - b| + |f(x') - b| < \epsilon.$$
(Chiều đảo) Lấy $\epsilon > 0$ tùy ý và chọn số $\delta > 0$ tương ứng sao cho giả thiết của phần đảo định lý được thỏa mãn. Khi đó nếu lấy dãy số tùy ý $(x_n) \subset X \backslash \{a\}$ và $\lim x_n = a$ thì có số tự nhiên $N$ (phụ thuộc $\delta$) sao cho với mọi $m, n \geq N$ ta có $0 < |x_n - a| < \delta$ và $0 < |x_m - a| < \delta$. Theo giả thiết của phần đảo, suy ra với mọi $m, n \geq N$ ta có $|f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$. Nói cách khác ta đã chứng minh được dãy $(f(x_n))$ là dãy Cauchy và do đó $(f(x_n))$ là dãy hội tụ.
Như vậy ta đã chứng minh được: nếu lấy dãy số tùy ý $(x_n) \subset X \backslash \{a\}$ và $\lim x_n = a$ thì dãy $(f(x_n))$ là dãy số hội tụ. Từ đây ta có các dãy $(f(x_n))$ đều hội tụ về cùng một giới hạn $b \in \mathbb{R}$ (tại sao?). Theo Định lý 4.1.11, ta suy ra $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

□

## 4.3 GIỚI HẠN MỘT PHÍA

**Định nghĩa 4.3.1** *a) Số thực $a$ được gọi là* **điểm giới hạn hai phía** *của tập $E \subset \mathbb{R}$ nếu với mọi $r > 0$ ta có $(a - r; a) \cap E \neq \varnothing$ và $(a; a + r) \cap E \neq \varnothing$.*

*b) Số thực a được gọi là* **điểm giới hạn bên trái** *của tập $E \subset \mathbb{R}$ nếu với mọi $r > 0$ ta có $(a - r; a) \cap E \neq \varnothing$.*

*c) Số thực a được gọi là* **điểm giới hạn bên phải** *của tập $E \subset \mathbb{R}$ nếu với mọi $r > 0$ ta có $(a; a + r) \cap E \neq \varnothing$.*

**Ví dụ 4.3.2** *Cho $E = (0; 1)$. Khi đó 0 và 1 lần lượt là điểm giới hạn bên phải và bên trái của $E$.*

**Định nghĩa 4.3.3** *Cho hàm số $f : X \to Y$ và a là điểm giới hạn trái (tương ứng giới hạn phải) của $X$. Ta nói $b \in \mathbb{R}$ là* **giới hạn trái** *(tương ứng* **giới hạn phải***) của $f(x)$ khi x tiến về a nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in X$, nếu $0 < a - x < \delta$ (tương ứng $0 < x - a < \delta$) thì $|f(x) - b| < \epsilon$. Khi đó ta viết*

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b$ *(tương ứng* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b$*).*

**Nhận xét 4.3.4** *i) Ta cũng có thể định nghĩa các giới hạn một phía sau đây $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ hay $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ (xem như là bài tập).*

*ii) Giới hạn một phía cũng có các tính chất tương tự như giới hạn hai phía, với chú ý là các lân cận thủng của a sẽ được thay bằng các khoảng $(a-r; a)$ hay $(a; a+r)$.*

**Định lý 4.3.5** *Cho hàm số $f : X \to Y$, a là điểm giới hạn hai phía của $X$. Khi đó*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = b$$

**Chứng minh:** Bài tập.

□

**Ví dụ 4.3.6** *Cho $f(x) = [x]$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 0^-}[x] = -1$ và $\lim\limits_{x\to 0^+}[x] = 0$. Thật vậy, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta = 1$ sao cho*

$$|f(x) + 1| = |[x] + 1| = | - 1 + 1| = 0 < \epsilon \text{ với } 0 < -x < 1$$

*và*

$$|f(x) - 0| = |[x] - 0| = |0 - 0| = 0 < \epsilon \text{ với } 0 < x < 1.$$

## 4.4 HÀM SỐ LIÊN TỤC

### 4.4.1 CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

**Định nghĩa 4.4.1** *Cho hàm số $f : X \to Y$ và $a \in X$. Ta có các định nghĩa sau.*

- *$f$ được gọi là* **liên tục tại** *$a$ nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in X$, nếu $|x - a| < \delta$ thì $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.*

- *$f$ được gọi là* **liên tục trên** *$X$ nếu $f$ liên tục tại mọi $a \in X$.*

- *Nếu $f$ không liên tục tại $a$ thì ta gọi $a$ là* **điểm gián đoạn** *của $f$.*

**Nhận xét 4.4.2** *a) Từ định nghĩa trên, dễ thấy nếu $a$ là một điểm cô lập của $X$ thì hàm số $f$ liên tục tại $a$. Thật vậy, do $a$ là một điểm cô lập của $X$ nên ta có một lân cận $U = (a - \delta; a + \delta)$ của $a$ sao cho $U \cap X = \{a\}$. Khi đó, với mọi $x \in X$, nếu $|x - a| < \delta$ thì $x = a$ nên $|f(x) - f(a)| = 0 < \epsilon$ với mọi $\epsilon > 0$.*
*b) Nếu $a \in X$ là điểm giới hạn của $X$ thì ta có $f$ liên tục tại $a$ nếu và chỉ nếu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

**Ví dụ 4.4.3** *Các hàm hằng, hàm đồng nhất ($f(x) = x$) xác định trên $\mathbb{R}$ là các hàm số liên tục tại mọi điểm của $\mathbb{R}$ và do đó chúng liên tục trên $\mathbb{R}$.*

Ta có một đặc trưng quan trọng của tính liên tục của hàm số thông qua các dãy hội tụ như sau.

**Định lý 4.4.4** *Hàm số $f : X \to Y$ liên tục tại $a \in X$ khi và chỉ khi ứng với mọi dãy $(x_n) \subset X$, nếu $(x_n)$ hội tụ về $a$ thì dãy $(f(x_n))$ hội tụ về $f(a)$.*

**Chứng minh:** Giả sử $f$ liên tục tại $a$. Khi đó với $\epsilon > 0$ tùy ý ta chọn $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in X$, nếu $|x - a| < \delta$ thì $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Khi đó nếu dãy $(x_n) \subset X$, $(x_n)$ hội tụ về $a$ thì ta có $N \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - a| < \delta$ với mọi $n \geq N$. Suy ra

$$|f(x_n) - f(a)| < \epsilon, \forall n \geq N.$$

Tức là $(f(x_n))$ hội tụ về $f(a)$.

Đảo lại, nếu $f$ không liên tục tại $a$, nghĩa là

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_\delta \in X, |x_\delta - a| < \delta \text{ và } |f(x) - f(a)| \geq \epsilon.$$

Bằng cách chọn $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ ta thu được dãy $(x_n) \subset X$, $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ và $|f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon$. Từ đây ta suy ra dãy $(x_n) \subset X$, $(x_n)$ hội tụ về $a$ nhưng dãy $(f(x_n))$ không hội tụ về $f(a)$ (trái với giả thiết).

□

Từ định lý trên và các tính chất về giới hạn của dãy số hội tụ, ta thu được các kết quả sau đây.

**Định lý 4.4.5** *Cho các hàm số $f, g : X \to Y$.*

*a) Nếu $f$ và $g$ liên tục tại $a \in X$ thì các hàm $|f|, f+g, fg$ và $\frac{f}{g}$ (nếu có một lân cận $U$ của $a$ sao cho $g(x) \neq 0, \forall x \in U \cap X$) cũng liên tục tại $a$.*

*b)* **(Tính liên tục của hàm hợp)** *Xét các hàm số $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$. Nếu $f$ liên tục tại $a \in X$ và $g$ liên tục tại $f(a) \in Y$ thì $g \circ f$ liên tục tại $a$.*

**Định nghĩa 4.4.6** *Một hàm số được gọi là* **hàm số sơ cấp** *nếu nó có thể được biểu diễn bởi một số hữu hạn các hàm số sơ cấp cơ bản (là các hàm lũy thừa, hàm mũ, hàm logarit, hàm lượng giác và lượng giác ngược) thông qua hữu hạn các phép toán số học và phép hợp thành.*

**Định lý 4.4.7** *Mọi hàm số sơ cấp đều liên tục trên miền xác định của nó.*

## 4.4.2 HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT ĐOẠN

**Định nghĩa 4.4.8** *Hàm số $f$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục tại mọi $x \in (a;b)$ và liên tục phải tại $a$ ($\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$), liên tục trái tại $b$ ($\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$).*

Hàm số liên tục trên một đoạn $[a;b]$ có các tính chất rất đặc biệt.

**Định lý 4.4.9 (Định lý giá trị cực biên Weierstrass)** *Cho $f$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó ta có*

*a) $f$ là hàm số bị chặn trên $[a;b]$, tức là tồn tại các số thực $m, M$ sao cho $m \le f(x) \le M, \forall x \in [a;b]$.*

*b) $f$ đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $[a;b]$.*

**Chứng minh:** a) Giả sử $f$ không bị chặn trên $[a;b]$. Khi đó, với mọi số tự nhiên $n$ tồn tại $x_n \in [a;b]$ sao cho $|f(x_n)| \ge n$. Theo định lý Bolzano-Weierstrass, dãy $(x_n)$ có một dãy con $(x_{n_k})$ hội tụ về $x_0$.

Rõ ràng $x_0 \in [a;b]$. Vì $f$ liên tục tại $x_0$ nên $(f(x_{n_k}))$ hội tụ về $f(x_0)$. Mặt khác ta luôn có $|f(x_{n_k})| \ge n_k, \forall k \in \mathbb{N}$ nên ta suy ra $|f(x_0)| \ge +\infty$ (vô lý!).

b) Theo câu a) tồn tại $M = \sup\limits_{x \in [a;b]} f(x)$ và $m = \inf\limits_{x \in [a;b]} f(x)$. Ta chứng minh $M$ là giá trị lớn nhất của hàm số $f$ trên $[a;b]$. Phần chứng minh $m$ là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f$ trên $[a;b]$ là hoàn toàn tương tự.

Thật vậy do $M = \sup\limits_{x \in [a;b]} f(x)$ nên có một dãy $(x_n) \in [a;b]$ sao cho $f(x_n) \to M$. Theo định lý Bolzano-Weierstrass, dãy $(x_n)$ có một dãy con $(x_{n_k})$ hội tụ về $c \in [a;b]$ và do đó $(f(x_{n_k}))$ hội tụ về $f(c)$ (vì $f$ liên tục tại $c$). Suy ra $M = f(c)$, tức là $f$ đạt giá trị lớn nhất tại $c$.

$\square$

**Định lý 4.4.10 (Định lý giá trị trung gian)** *Cho $f$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử $u$ là một số nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$ (tức là $f(a) < u < f(b)$ hoặc $f(a) > u > f(b)$). Khi đó tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = u$.*

**Chứng minh:** Định lý được chứng minh trong giờ lý thuyết.

□

Định lý giá trị trung gian có các hệ quả quan trọng sau đây.

**Hệ quả 4.4.11** *Cho $f$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $f(a)f(b) < 0$ thì tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$, tức là phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(a; b)$.*

**Hệ quả 4.4.12** *Cho $f$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó $f([a; b]) = [m; M]$, trong đó $m$ và $M$ lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $f$ trên đoạn $[a; b]$.*

**Chứng minh:** Bài tập.

□

**Ví dụ 4.4.13** *Cho $n$ là một số tự nhiên. Chứng minh rằng: với mọi số thực $a > 0$, tồn tại duy nhất một số thực $b > 0$ sao cho $b^n = a$ (ta gọi số thực $b$ đó là căn bậc $n$ của $a$, kí hiệu $\sqrt[n]{a}$).*

### 4.4.3 HÀM SỐ LIÊN TỤC ĐỀU

**Định nghĩa 4.4.14** *Cho hàm số $f : X \to Y$. $f$ được gọi là* **liên tục đều trên** *$X$ nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x, x' \in X$, nếu $|x - x'| < \delta$ thì $|f(x) - f(x')| < \epsilon$.*

Từ định nghĩa ta thấy ngay nếu $f$ liên tục đều trên $X$ thì $f$ liên tục trên $X$. Ngoài ra, khái niệm liên tục đều cũng có thể phát biểu thông qua dãy số như sau.

**Định lý 4.4.15** *$f$ liên tục đều trên $X$ khi và chỉ khi với mọi dãy $(x_n), (x'_n)$ trong $X$, nếu $|x_n - x'_n| \to 0$ thì $|f(x_n) - f(x'_n)| \to 0$.*

**Chứng minh:** Lập luận tương tự như phần chứng minh của Định lý 4.4.4.

□

**Ví dụ 4.4.16** *a) Chứng minh rằng hàm số $f(x) = 2x + 1$ liên tục đều trên $\mathbb{R}$.*

*b) Chứng minh rằng hàm số $f(x) = x^2$ không liên tục đều trên $\mathbb{R}$. (Chú ý là $f(x) = x^2$ liên tục trên $\mathbb{R}$.)*

**Lời giải:** a) Với $\epsilon > 0$ tùy ý, tồn tại $\delta = \epsilon/2 > 0$ sao cho với mọi $x, x' \in \mathbb{R}$, nếu $|x - x'| < \delta$ thì $|f(x) - f(x')| = 2|x - x'| < 2\delta = \epsilon$. Do đó $f(x) = 2x + 1$ liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

b) Chọn hai dãy $(x_n), (x'_n)$ trong $\mathbb{R}$ sao cho $x_n = n$, $x'_n = n + 1/n$. Khi đó $|x_n - x'_n| = 1/n \to 0$ nhưng $|f(x_n) - f(x'_n)| = 2 + 1/n$ không hội tụ về 0. Vậy $f(x) = x^2$ không liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

□

**Định lý 4.4.17 (Định lý Cantor)** *Nếu $f$ liên tục trên [a;b] thì $f$ liên tục đều trên [a;b].*

**Chứng minh:** Giả sử phản chứng $f$ không liên tục đều trên [a;b]. Khi đó ta có

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, x' \in [a;b], |x - x'| < \delta \text{ và } |f(x) - f(x')| \geq \epsilon.$$

Cho $\delta = 1/n, n \in \mathbb{N}$ ta sẽ có hai dãy $(x_n), (x'_n)$ trong $[a;b]$ sao cho $|x_n - x'_n| < 1/n$ và $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \epsilon$.
Vì dãy $(x_n)$ bị chặn trong $[a;b]$ nên nó có một dãy con $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ hội tụ về $c \in [a;b]$. Chú ý là với mọi $k \in \mathbb{N}$ ta luôn có

$$|x'_{n_k} - c| = |x'_{n_k} - x_{n_k} + x_{n_k} - c| \leq |x'_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - c| < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - c|.$$

Do đó dãy $(x'_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ cũng hội tụ về $c$. Do $f$ liên tục tại $c$ nên các dãy $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ và $(f(x'_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ cùng hội tụ về $f(c)$. Điều này là vô lý vì $|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq \epsilon$.

□

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 4

1) a) Chứng minh rằng mọi số thực đều là điểm giới hạn của tập các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$.
   b) Cho $E = \left\{x = \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Tìm các điểm cô lập của $E$.

2) Viết các định nghĩa cho 6 trường hợp còn lại theo ngôn ngữ bất đẳng thức trong phần Nhận xét 4.1.10.

3) Tính các giới hạn sau
   a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2^x-1}{2^x+1}$
   b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$
   c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [\frac{1}{x}]$
   d) $\lim\limits_{x\to1^\pm} 2^{\frac{1}{x-1}}$

4) Chứng tỏ không tồn tại các giới hạn sau
   a) $\lim\limits_{x\to0} \cos\frac{1}{x}$
   b) $\lim\limits_{x\to0} \frac{[x]}{x}$
   c) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$

5) Khảo sát tính liên tục của các hàm số cho bởi các giới hạn sau
   a) $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+x^n}$
   b) $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$
   c) $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$
   d) $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}}$

6) Chứng minh hàm số $f(x) = [x]sin(\pi x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

7) Xét tính liên tục của các hàm số sau
   a) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ nếu } & x \in \mathbb{Z} \\ 0, \text{ nếu } & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$
   b) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ nếu } & x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ nếu } & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
   c)* $f(x) = \begin{cases} g(x), \text{ nếu } & x \in \mathbb{Q} \\ h(x), \text{ nếu } & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ ($g, h$ là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$).

8) Cho hàm số $f : X \to Y$ liên tục tại $a$ và $f(a) > 0$. Chứng minh rằng tồn tại một lân cận $U$ của $a$ sao cho $f(x) > 0$ với mọi $x \in U \cap X$.

9)* Cho các hàm số $f, g : X \to \mathbb{R}$ và $A \subset X$. Nếu $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in A$ và hàm $f$ liên tục trên $A$ thì có thể kết luận hàm $g$ cũng liên tục trên $A$ hay không? (Hướng dẫn: xét hàm số Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ nếu } & x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ nếu } & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$)

10) Cho các hàm số $f$ và $g$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{Q}$. Chứng minh $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

11)* Cho các hàm số $f$ và $g$ xác định và liên tục trên $X$. Chứng minh các hàm $\max(f(x), g(x))$ và $\min(f(x), g(x))$ cũng liên tục trên $X$.

12) Chứng minh mọi đa thức bậc lẻ đều có ít nhất một nghiệm thực.

13) a) Cho $f : [a; b] \to [a; b]$ là hàm số liên tục trên $[a; b]$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ có nghiệm trong $[a; b]$.

b) Cho $f, g$ là các hàm số liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) < g(a)$, $f(b) > g(b)$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = g(c)$.

14) Chứng minh các hàm số sau liên tục đều trên các tập tương ứng

a) $f(x) = 3x + 4, x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = x + \sin x, x \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \frac{1}{x}, x \in [1; +\infty)$

d) $f(x) = \sqrt{x}, x \in [0; +\infty)$

15) Chứng minh các hàm số sau không liên tục đều trên các tập tương ứng

a) $f(x) = x^2 + x, x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = \sin x^2, x \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (0; +\infty)$

d) $f(x) = \ln x, x \in (0; 1]$

16)* a) Cho $f : (a; b) \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục trên $(a; b)$ sao cho $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ tồn tại hữu hạn. Chứng minh $f$ liên tục đều trên $(a; b)$. (Hướng dẫn: dùng định lý Cantor)

b) Cho $f : (a; b) \to \mathbb{R}$ là hàm số đơn điệu, bị chặn và liên tục trên $(a; b)$. Chứng minh $f$ liên tục đều trên $(a; b)$. (Hướng dẫn: chứng minh các giới hạn $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ tồn tại hữu hạn rồi áp dụng câu a)).

17)* Cho $f, g$ là hai hàm số bị chặn và liên tục đều trên $X$. Chứng minh các hàm số $f + g, fg$ cũng liên tục đều trên $X$. (Hướng dẫn: dùng Định lý 4.4.15)

18) a) Một hàm số $f : X \to Y$ được gọi là **Lipschitz** nếu tồn tại $M > 0$ sao cho $|f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|$ với mọi $x, x' \in X$. Chứng minh mọi hàm Lipschitz là liên tục đều.

b) Một hàm số $f : X \to Y$ được gọi là **hàm co** nếu tồn tại $0 < M < 1$ sao cho $|f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|$ với mọi $x, x' \in X$. Chứng minh nếu $X = Y = [a; b]$ và hàm $f : X \to Y$ là hàm co thì phương trình $f(x) = x$ có duy nhất một nghiệm trong $[a; b]$.

19)* Nếu hàm số $f$ liên tục đều trên các tập $A$ và $B$ thì có thể kết luận $f$ liên tục đều trên $A \cup B$ hay không? (Hướng dẫn: Xét hàm số $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$, $A = (-1; 0), B = (0; 1)$. Dùng định lý Cantor chứng minh $f$ liên tục đều trên các tập $A$ và $B$. Chứng tỏ $f$ không liên tục đều trên $A \cup B$)

# Chương 5

# PHÉP TÍNH VI PHÂN

## 5.1 KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

**Định nghĩa 5.1.1** *Cho hàm số $f : (a; b) \to \mathbb{R}$. Ta nói $f$* **khả vi tại** *$x_0 \in (a; b)$ nếu biểu thức $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ có giới hạn hữu hạn khi $h \to 0$. Giá trị của giới hạn đó được gọi là* **đạo hàm của** *$f$* **tại** *$x_0$, ký hiệu $f'(x_0)$, tức là*

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

*Nếu hàm số $f$ khả vi tại mọi $x_0 \in (a; b)$ thì ta nói $f$* **khả vi trên** *$(a; b)$.*

**Nhận xét 5.1.2** *(i) Theo định nghĩa ta suy ra nếu $f$ khả vi tại $x_0$ thì $f$ liên tục tại $x_0$.*

*(ii) Giả sử $f$ khả vi tại $x_0$. Khi đó ta có thể viết*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\phi(h),$$

*trong đó $\phi(h) \to 0$ khi $h \to 0$. Ánh xạ tuyến tính $df_{x_0} : h \mapsto hf'(x_0)$ được gọi là* **vi phân của** *$f$* **tại** *$x_0$, nghĩa là $df_{x_0}(h) = hf'(x_0)$ (*).*

*Mặt khác hàm số đồng nhất $f(x) = x$ có vi phân là $dx(h) = h$ nên ta thường viết đẳng thức (*) là $df_{x_0}(h) = f'(x_0)dx(h)$ hay vắn tắt là $df_{x_0} = f'(x_0)dx$.*

*Trong trường hợp $f$ khả vi trên $(a; b)$ thì ta gọi $df = f'(x)dx$ là vi phân của $f$ trên (a;b).*

*(iii) Tính khả vi là một khái niệm có tính* **địa phương***, nghĩa là hàm $f$ có khả vi tại $x_0$ hay không thì phụ thuộc vào giá trị của hàm đó trên một lân cận của $x_0$. Từ đó ta có thể mở rộng khái niệm khả vi cho các hàm số $f : D \to \mathbb{R}$ với $D$ là một* **tập mở** *trong $\mathbb{R}$, nghĩa là với mọi $x \in D$ đều có một lân cận của $x$ nằm trong $D$.*

Ta có các tính chất cơ bản sau đây cho các hàm số khả vi ($D$ luôn được hiểu là tập mở).

**Định lý 5.1.3** *Cho $f, g : D \to \mathbb{R}$ là các hàm số khả vi trên $D$. Khi đó các hàm số $f+g$, $kf (k \in \mathbb{R})$, $fg$ và (nếu có thêm $g(x) \neq 0$ với mọi $x \in D$) $\frac{f}{g}$ cũng khả vi trên $D$. Hơn nữa ta có với mọi $x \in D$*

*a)* $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,

*b)* $(kf)'(x) = kf'(x)$,

*c)* $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

*d)* $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

**Định lý 5.1.4** *Cho các hàm số $f : D_1 \to D_2$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$. Giả sử $f$ khả vi tại $x \in D_1$ và $g$ khả vi tại $y = f(x) \in D_2$. Khi đó hàm hợp $g \circ f$ khả vi tại $x$ và*

$$(g \circ f)'(x) = g'[f(x)]f'(x).$$

**Định lý 5.1.5 (Tính khả vi của hàm ngược)** *Cho song ánh $f : D \to f(D)$ khả vi tại $x \in D$ và $f'(x) \neq 0$. Nếu hàm ngược $f^{-1} : f(D) \to D$ liên tục tại $y = f(x) \in f(D)$ thì $f^{-1}$ khả vi tại $y = f(x)$ và*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

**Chứng minh:** Bài tập.

□

**Ví dụ 5.1.6** *Xét hàm số $f(x) = \sin x, x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Ta có hàm ngược $f^{-1} = \arcsin y, y \in (-1; 1)$. Rõ ràng các hàm số $f$ và $f^{-1}$ thỏa mãn các điều kiện của Định lý 5.1.5 nên*

$$(f^{-1})'(y) = (\arcsin y)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

*Vậy ta suy ra $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, với $x \in (-1; 1)$.*

Lập luận tương tự như trong ví dụ trên cho các hàm lượng giác ngược khác, ta dễ dàng thu được kết quả sau.

**Mệnh đề 5.1.7**

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, *với* $x \in (-1; 1)$.
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, *với* $x \in (-1; 1)$.
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, *với* $x \in \mathbb{R}$.
- $(arc\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$, *với* $x \in \mathbb{R}$.

## 5.2 ĐẠO HÀM CẤP CAO

Cho hàm số $f : D \to \mathbb{R}$ khả vi trên $D$. Khi đó ánh xạ $f' : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$ được gọi là **hàm đạo hàm cấp 1 của** $f$. Nếu $f'$ khả vi tại $x \in D$ thì đạo hàm $(f')'(x)$ của $f'$ tại $x$ được gọi là **đạo hàm cấp 2 của** $f$ **tại** $x$, ký hiệu $f''(x)$. Do đó nếu $f'$ khả vi trên $D$ thì $f''(x) = (f')'(x)$ với mọi $x \in D$.

Bằng quy nạp, ta định nghĩa đạo hàm cấp $n+1$ của $f$ trên $D$ bởi: $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x)$ với mọi $x \in D$.

Một số ví dụ về các đạo hàm cấp cao.

- $(e^x)^{(n)} = e^x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$ với mọi $x > 0$.

Ngoài ra bằng quy nạp ta chứng minh được các tính chất sau đây cho các đạo hàm cấp cao.

**Mệnh đề 5.2.1** *Cho $u, v$ là hai hàm số có đạo hàm tới cấp $n$ trên $D$. Khi đó các hàm $u+v$, $ku\,(k \in \mathbb{R})$ và $uv$ cũng có đạo hàm đến cấp $n$ trên $D$. Hơn nữa, ta có*

*(i)* $(ku)^{(n)} = ku^{(n)}$,

*(ii)* $(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$,

*(iii)* $(uv)^{(n)} = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}$ *(với quy ước* $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$*).*

Chú ý là khi $f$ có đạo hàm tới cấp $n$ trên $D$ thì các hàm đạo hàm cấp $k \leq n-1$ của $f$ đều là các hàm liên tục trên $D$. Nếu $f^{(n)}$ cũng là hàm liên tục trên $D$ thì ta nói $f$ **thuộc lớp** $C^n$ **trên** $D$, ký hiệu $f \in C^n(D)$.

Khi $f$ có đạo hàm mọi cấp trên $D$ thì tất cả các đạo hàm của $f$ đều liên tục trên $D$. Trong trường hợp này ta nói $f$ **thuộc lớp** $C^\infty$ **trên** $D$, ký hiệu $f \in C^\infty(D)$.

## 5.3 CÁC ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

**Định nghĩa 5.3.1** *Hàm số $f : D \to \mathbb{R}$ được gọi là đạt cực đại (cực tiểu) tại $x_0$ nếu tồn tại một lân cận $U = (x_0 - r; x_0 + r) \subset D$ của $x_0$ sao cho với mọi $x \in U$ ta có*

$$f(x) \leq f(x_0)\,(f(x) \geq f(x_0)).$$

*Hàm số đạt cực đại hay đạt cực tiểu gọi chung là đạt cực trị.*

### 5.3.1 Định lý Fermat

**Định lý 5.3.2** *Nếu hàm số $f$ đạt cực trị tại $x_0$ và $f$ khả vi tại $x_0$ thì $f'(x_0) = 0$.*

**Chứng minh:** Không mất tính tổng quát, ta giả sử $f$ đạt cực đại tại $x_0$. Khi đó tồn tại một lân cận $U = (x_0 - r; x_0 + r)$ của $x_0$ sao cho với mọi $x \in U$ ta có $f(x) \leq f(x_0)$. Do đó

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \forall x \in (x_0; x_0 + r)$$

và

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \forall x \in (x_0 - r; x_0).$$

Từ đây ta suy ra

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

và

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Vậy $f'(x_0) = 0$.

□

**Nhận xét 5.3.3** *(i) Hàm $f(x) = x^3$ có $f'(0) = 0$ nhưng $f$ không có cực trị tại $x = 0$.*

*(ii) Hàm $f(x) = -|x|$ đạt cực đại tại $x = 0$ nhưng $f$ không khả vi tại $x = 0$.*

### 5.3.2 Định lý Rolle

**Định lý 5.3.4** *Cho hàm số $f$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, khả vi trên $(a; b)$ và $f(a) = f(b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = 0$.*

**Chứng minh:** Theo giả thiết $f$ liên tục trên $[a; b]$ nên $f$ đạt giá trị lớn nhất $M$ và giá trị nhỏ nhất $m$ trên $[a; b]$.

- Nếu $M = m$ thì $f$ là hàm hằng trên $[a; b]$. Khi đó $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a; b)$. Do đó ta có thể chọn $c$ là điểm tùy ý thuộc $(a; b)$.

- Nếu $M \neq m$ thì một trong hai số $M, m$ phải khác với $f(a) = f(b)$. Giả sử $M \neq f(a) = f(b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = M$. Rõ ràng $f$ đạt cực đại tại $c$ (do $f(x) \leq f(c)$ với mọi $x \in (a; b)$). Theo định lý Fermat, ta suy ra $f'(c) = 0$.

□

### 5.3.3 Định lý Cauchy

**Định lý 5.3.5** *Cho $f, g$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$, khả vi trên $(a;b)$ và $g'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a;b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

**Chứng minh:** Ta có $g(b) \neq g(a)$ vì nếu ngược lại thì theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho $g'(c) = 0$, mâu thuẫn với giả thiết $g'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a;b)$.

Đặt

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

thì $h$ thỏa mãn các điều kiện của định lý Rolle. Do đó tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho $h'(c) = 0$, tức là

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0.$$

□

### 5.3.4 Định lý Lagrange

**Định lý 5.3.6** *Cho $f$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$, khả vi trên $(a;b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.*

**Chứng minh:** Chọn $g(x) = x$ và áp dụng định lý Cauchy.

□

Một áp dụng quan trọng của định lý Lagrange là hệ quả sau đây.

**Hệ quả 5.3.7** *Cho hàm số $f$ khả vi trên $(a;b)$. Khi đó ta có*

*(i) $f$ là hàm số tăng trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a;b)$.*

*(ii) $f$ là hàm số giảm trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a;b)$.*

*(iii) $f$ là hàm hằng trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x) = 0, \forall x \in (a;b)$.*

**Chứng minh:** (i) Giả sử $f$ là hàm số tăng trên $(a;b)$. Lấy $x_0 \in (a;b)$ tùy ý ta có

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Đảo lại, giả sử $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a;b)$. Xét $a < x_1 < x_2 < b$, ta có $f$ liên tục trên $[x_1;x_2]$ và khả vi trên $(x_1;x_2)$ nên theo định lý Lagrange tồn tại $c \in (x_1;x_2)$ sao cho $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Từ đây rõ ràng ta có $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, tức là $f(x_1) \leq f(x_2)$.

(ii) và (iii) Chứng minh tương tự.

□

## 5.4 QUY TẮC L' HÔPITAL

Quy tắc L' Hôpital là một quy tắc rất hữu dụng cho phép ta tính các giới hạn có dạng vô định bằng công cụ đạo hàm. Chứng minh của quy tắc này có thể tìm thấy trong phần Phụ lục A.4.2, trang 452 của quyển sách Mathematical Analysis I, Claudio Canuto - Anita Tabacco. Trong quy tắc này $c$ được hiểu là $x_0, x_0^+, x_0^-, +\infty, -\infty$.

**Định lý 5.4.1 (Quy tắc L' Hôpital)** *Cho $f, g$ là các hàm số xác định và khả vi trên một lân cận thủng $U$ của $c$ sao cho*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = b,$$

*trong đó $b = 0, +\infty$ hoặc $-\infty$. Khi đó nếu $g' \neq 0$ trên $U$ và nếu*

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

*thì*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

*Nói cách khác*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Nhận xét 5.4.2** *(i) Nếu tỷ số $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ vẫn còn là dạng vô định và $f', g'$ cũng thỏa mãn các giả thiết của quy tắc L' Hôpital thì ta sẽ tính giới hạn của tỷ số $\frac{f''(x)}{g''(x)}$, và cứ tiếp tục quá trình như thế cho đến khi ta tìm được giới hạn (nếu có).*

*(ii) Quy tắc L' Hôpital chỉ là điều kiện đủ cho sự tồn tại của giới hạn $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$. Nói cách khác, nếu giới hạn của tỷ số của các đạo hàm không tồn tại thì ta không có kết luận gì về $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$.*

**Ví dụ 5.4.3** *a)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{sinx} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$

*b)* $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0.$

**Ví dụ 5.4.4** *Xét hai hàm số $f(x) = x + \sin x$ và $g(x) = x$ thì $\frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 + \cos x$ không có giới hạn khi $x \to +\infty$. Tuy nhiên $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to +\infty} (1 + \frac{\sin x}{x}) = 1$ theo nguyên lý kẹp.*

## 5.5 KHAI TRIỂN TAYLOR

### 5.5.1 Khai triển Taylor với phần dư Peano

**Định lý 5.5.1** *Cho hàm số $f$ khả vi đến cấp $n-1$ trên một lân cận $U$ của $x_0$ và tồn tại $f^{(n)}(x_0)$ ($n \in \mathbb{N}$ cho trước). Khi đó ta có công thức khai triển Taylor cấp $n$ của hàm $f$ tại $x_0$ với phần dư Peano sau đây.*

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\mathcal{O}((x-x_0)^n)$$

*khi $x \to x_0$.*

*Số hạng $\mathcal{O}((x-x_0)^n)$ được gọi là* **phần dư Peano** *và được định nghĩa là biểu thức sao cho $\frac{\mathcal{O}((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n} \to 0$ khi $x \to x_0$.*

*Đa thức $Tf_{n,x_0}(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ được gọi là* **đa thức Taylor bậc $n$ của $f$ tại $x_0$**.

**Chứng minh:** Ta cần chứng minh $L = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-Tf_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0$. Thật vậy, chú ý giới hạn cần tính là một dạng vô định $\frac{0}{0}$ nên ta có thể áp dụng quy tắc L' Hôpital để tính giới hạn đó. Để khử hoàn toàn dạng vô định ta cần đạo hàm $n-1$ lần tử số và mẫu số của giới hạn cần tính. Khi đó ta sẽ thu được giới hạn sau đây

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!(x-x_0)}.$$

Rõ ràng giới hạn cuối cùng này bằng 0 theo định nghĩa của $f^{(n)}(x_0)$. Vậy $L = 0$.

□

### 5.5.2 Khai triển Taylor với phần dư Lagrange

**Định lý 5.5.2** *Cho hàm số $f$ khả vi đến cấp $n+1$ trên một lân cận $U$ của $x_0$. Khi đó với mọi $x \in U$ ta luôn có*

$$f(x) = Tf_{n,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

*với $c$ là một số nằm giữa $x$ và $x_0$, tức là $c = x_0+\theta(x-x_0)$ với $0<\theta<1$.*

*Số hạng $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ được gọi là* **phần dư Lagrange**.

**Chứng minh:** Lấy $x \in U$ tùy ý và $x \neq x_0$, ta đặt $u(x) = f(x) - Tf_{n,x_0}(x)$ và $v(x) = (x-x_0)^{n+1}$. Với $k = 0, 1, \ldots, n$ ta luôn có

$$u^{(k)}(x_0) = 0, v^{(k)}(x_0) = 0, \text{ và } v^{(k)}(x) \neq 0 \text{ với mọi } x \neq x_0.$$

Áp dụng định lý Cauchy cho hai hàm $u, v$ trên khoảng $I_1$ giữa $x_0$ và $x$, ta tìm được $x_1 \in I_1$ sao cho

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x) - u(x_0)}{v(x) - v(x_0)} = \frac{u'(x_1)}{v'(x_1)}.$$

Tương tự, áp dụng định lý Cauchy cho hai hàm $u', v'$ trên khoảng $I_2$ giữa $x_0$ và $x_1$, ta tìm được $x_2 \in I_2 \subset I_1$ sao cho

$$\frac{u'(x_1)}{v'(x_1)} = \frac{u'(x_1) - u'(x_0)}{v'(x_1) - v'(x_0)} = \frac{u''(x_2)}{v''(x_2)}.$$

Áp dụng định lý Cauchy liên tiếp, cuối cùng ta tìm được $x_{n+1} \in I_{n+1} \subset I_1$ sao cho

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(x_1)}{v'(x_1)} = \frac{u''(x_2)}{v''(x_2)} = \cdots = \frac{u^{(n+1)}(x_{n+1})}{v^{(n+1)}(x_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}.$$

Chọn $c = x_{n+1}$ thì $c$ là một số nằm giữa $x$ và $x_0$ và

$$f(x) = Tf_{n,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

□

Khai triển Taylor của các hàm số ứng với $x_0 = 0$ được gọi là **khai triển Maclaurin**. Dưới đây là khai triển Maclaurin của một số hàm sơ cấp.

- Hàm $e^x$ với $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^n) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\ (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

- Hàm $\ln(1 + x)$ với $x > -1$:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^n) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}\ (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

- Hàm $\sin x$ với $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}) \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\sin(\theta x + (2n+3)\frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

- Hàm $\cos x$ với $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}(x^{2n}) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos(\theta x + (2n+2)\frac{\pi}{2}).\end{aligned}$$

- Hàm $(1+x)^\alpha$ với $x > -1, \alpha \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + C_\alpha^n x^n + \mathcal{O}(x^n)$$

với quy ước $C_\alpha^0 = 1$ và $C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$ khi $k \in \mathbb{N}$.

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 5

1) Xét tính khả vi của các hàm số sau

a) $y = |\sin x|$

b) $y = x|x|$

c) $y = |\pi - x| \sin x$

d) $y = \begin{cases} x^2, \text{ nếu } \ x \leq 0 \\ e^{-1/x}, \text{ nếu } \ x > 0 \end{cases}$

e) $y = \begin{cases} x^2, \text{ nếu } \ x \in \mathbb{Q} \\ -x^2, \text{ nếu } \ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

f) $y = \begin{cases} x^2, \text{ nếu } \ x \in \mathbb{Z} \\ 0, \text{ nếu } \ x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

2) Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, \text{ nếu } \ x \neq 0 \\ 0, \text{ nếu } \ x = 0 \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng $f$ khả vi trên $\mathbb{R}$. Hàm $f$ có thuộc lớp $C^1$ trên $\mathbb{R}$ không?

3) Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ nếu } \ x \neq 0 \\ 0, \text{ nếu } \ x = 0 \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

4) Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

trong đó $M > 0$ và $\alpha > 1$ là các hằng số cho trước. Chứng minh $f$ là hàm hằng trên $\mathbb{R}$.

5) Cho $D$ là một tập mở khác rỗng của $\mathbb{R}$. Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in D$ thì ta có thể kết luận $f$ là hàm hằng trên $D$ hay không?

6) Cho $f, g$ khả vi trên $\mathbb{R}$ sao cho $f(a) = g(a)$ và $f(x) \leq g(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh $f'(a) = g'(a)$.

7)* Cho $f$ khả vi trên $\mathbb{R}$ sao cho $f(x + \sin x) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng phương trình $f'(x) = 0$ có vô số nghiệm thực. (Hướng dẫn: Áp dụng định lý Fermat tại các $x = k2\pi$)

8)***(Định lý Darboux)** Cho $f$ khả vi trên $[a;b]$. Giả sử $f'(a) < m < f'(b)$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho $f'(c) = m$. (Hướng dẫn: Xét hàm số $g(x) = f(x) - m(x-a)$ thì $g$ đạt giá trị nhỏ nhất tại một điểm trong $(a;b)$)

9) Cho $f, g$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, khả vi trên $(a;b)$ sao cho: $f(a) \leq g(a)$ và $f'(x) < g'(x)$ với mọi $x \in (a;b)$. Chứng minh rằng: $f(x) < g(x)$ với mọi $x \in (a;b)$. (Hướng dẫn: Áp dụng định lý Lagrange)

10) Áp dụng định lý Lagrange, chứng minh các bất đẳng thức sau

a) $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

b) $|\arctan x - \arctan y| \leq |x-y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

c) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \forall x > 0$

d) $e^x > ex, \forall x > 1$.

11) Cho hàm số $f$ khả vi trên $(a;b)$ và $f$ không bị chặn trên $(a;b)$. Chứng minh $f'$ cũng không bị chặn trên $(a;b)$.

12) Cho hàm số $f$ khả vi trên $(a;b)$ và hàm đạo hàm $f'$ bị chặn trên $(a;b)$. Chứng minh rằng $f$ liên tục đều trên $(a;b)$.

13) Cho hàm số $f$ khả vi trên $(a;b)$.

a) Chứng minh rằng nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a;b)$ thì $f$ là hàm tăng ngặt trên $(a;b)$. Chiều ngược lại có đúng không?

b) Chứng minh $f$ là hàm tăng ngặt trên $(a;b)$ khi và chỉ khi hai điều kiện sau được thỏa mãn:

(i) $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a;b)$.

(ii) Không tồn tại khoảng $(c;d) \subset (a;b)$ sao cho $f'(x) = 0, \forall x \in (c;d)$.

14) Dùng quy tắc L'Hospital hãy tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^a-1}{x^b-1}$ $(b \neq 0)$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{\tan x - x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(e+x)-1}{e^x-e^{-x}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} x \ln\left(\frac{2\arctan x}{\pi}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

h) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\cos x}$

15)* Dùng khai triển Maclaurin của hàm $e^x$, chứng minh $e$ là số vô tỷ.

16) Viết khai triển Maclaurin của các hàm số sau đến cấp 10, từ đó hãy tính $f^{(9)}(0)$.

a) $f(x) = x^2 \sin x$

b) $f(x) = (x + x^3)e^x$

17)* Cho $f \in C^3(\mathbb{R})$. Giả sử $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f'''(x) = 0$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f''(x) = 0$. (Hướng dẫn: Viết khai triển Taylor đến cấp 3 cho hàm $f$ với phần dư Lagrange)

18)* Cho $f \in C^2([0;1])$ sao cho $f(0) = f(1) = 0$ và $|f''(x)| \leq M, \forall x \in (0;1)$. Chứng minh rằng $|f'(x)| \leq \frac{M}{2}, \forall x \in [0;1]$. (Hướng dẫn: Viết khai triển Taylor đến cấp 2 cho hàm $f$ với phần dư Lagrange tại 0 và 1)

# Chương 6

# PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

## 6.1 TÍCH PHÂN RIEMANN

### 6.1.1 Khái niệm tích phân Riemann

**Định nghĩa 6.1.1 Một phân hoạch** $P$ **của đoạn** $[a;b]$ *là một tập hữu hạn* $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ *sao cho* $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} = b$*. Tập hợp tất cả các phân hoạch của* $[a;b]$ *được ký hiệu là* $\mathcal{P}_{[a;b]}$ *hay đơn giản hơn là* $\mathcal{P}$ *khi không cần làm rõ đoạn* $[a;b]$.
*Cho* $P, Q \in \mathcal{P}$*. Ta nói* $Q$ **mịn hơn** $P$ *nếu* $P \subset Q$.

Giả sử $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ là một hàm số bị chặn và $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ là một phân hoạch của $[a;b]$. Với mỗi $i$ từ $1, 2, \ldots, n$, ta đặt

$$M_i(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_i; x_{i+1}]\}$$

và

$$m_i(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_i; x_{i+1}]\}.$$

Ta định nghĩa

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_{i+1} - x_i)$$

và

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_{i+1} - x_i).$$

$U(P, f)$ và $L(P, f)$ lần lượt được gọi là **tổng Darboux trên và tổng Darboux dưới của** $f$ **trên đoạn** $[a;b]$ ứng với phân hoạch $P$.

Gọi $M = \sup\{|f(x)| : x \in [a;b]\}$. Rõ ràng, với mọi phân hoạch $P$, $U(P, f)$ và $L(P, f)$ bị chặn và

$$-M(b-a) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M(b-a).$$

Ta có kết quả sau đây về các tổng Darboux.

**Định lý 6.1.2** *Giả sử $P, Q \in \mathcal{P}$. Khi đó ta có các khẳng định sau.*
*(i) Nếu $P \subset Q$ thì $L(P,f) \leq L(Q,f) \leq U(Q,f) \leq U(P,f)$.*
*(ii) $L(P,f) \leq U(Q,f)$.*
*(iii) $\sup\limits_{P\in\mathcal{P}} L(P,f) \leq \inf\limits_{P\in\mathcal{P}} U(P,f)$.*

**Chứng minh:** (i) Bài tập.
(ii) Vì $P, Q \in \mathcal{P}$ nên $P \cup Q$ cũng là một phân hoạch. Theo (i) ta suy ra

$$L(P,f) \leq L(P \cup Q, f) \leq U(P \cup Q, f) \leq U(Q,f).$$

(iii) Hiển nhiên theo (ii).

□

**Định nghĩa 6.1.3** *Ta nói $f$* **khả tích Riemann trên** *$[a;b]$, ký hiệu $f \in \mathcal{R}([a;b])$ nếu $\inf\limits_{P\in\mathcal{P}} U(P,f) = \sup\limits_{P\in\mathcal{P}} L(P,f) = I$. Khi đó ta định nghĩa tích phân Riemann của $f$ trên $[a;b]$ là*

$$\int_a^b f(x)dx = \inf_{P\in\mathcal{P}} U(P,f) = \sup_{P\in\mathcal{P}} L(P,f) = I.$$

**Ví dụ 6.1.4** *a) Hàm số $f(x) = 1$ trên $[a;b]$ có $U(P,f)$ và $L(P,f)$ đều bằng $b-a$ với mọi phân hoạch $P$ của đoạn $[a;b]$. Vậy*

$$\int_a^b 1dx = \inf_{P\in\mathcal{P}} U(P,f) = \sup_{P\in\mathcal{P}} L(P,f) = b-a.$$

*b) Hàm số Dirichlet không khả tích Riemann trên bất kỳ đoạn $[a;b]$ nào vì $U(P,f) = b-a$ và $L(P,f) = 0$ với mọi phân hoạch $P$ của đoạn $[a;b]$.*

Định lý sau đây cho ta một đặc trưng tương đương về tính khả tích.

**Định lý 6.1.5** *$f \in \mathcal{R}([a;b])$ khi và chỉ khi với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại một phân hoạch $P$ sao cho*

$$U(P,f) - L(P,f) < \epsilon.$$

**Chứng minh:** Giả sử $f \in \mathcal{R}([a;b])$. Khi đó ta có

$$\inf_{P\in\mathcal{P}} U(P,f) = \sup_{P\in\mathcal{P}} L(P,f) = I.$$

Do đó, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại hai phân hoạch $P_1$ và $P_2$ sao cho $I - \frac{\epsilon}{2} < L(P_1; f)$ và $U(P_2; f) < I + \frac{\epsilon}{2}$. Đặt $P = P_1 \cup P_2$ ta có

$$I - \frac{\epsilon}{2} < L(P_1; f) \le L(P, f) \le U(P, f) \le U(P_2, f) < I + \frac{\epsilon}{2}.$$

Vậy $U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$.

Ngược lại, giả sử với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại một phân hoạch $P$ sao cho

$$U(P, f) - L(P, f) < \epsilon.$$

Ta cần chứng minh

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} U(P, f) = \sup_{P \in \mathcal{P}} L(P, f).$$

Thật vậy, ta chú ý là

$$L(P, f) \le \sup_{P \in \mathcal{P}} L(P, f) \le \inf_{P \in \mathcal{P}} U(P, f) \le U(P, f) < L(P, f) + \epsilon.$$

Do đó

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} U(P, f) - \sup_{P \in \mathcal{P}} L(P, f) < \epsilon.$$

Vậy

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} U(P, f) = \sup_{P \in \mathcal{P}} L(P, f).$$

□

Áp dụng định lý vừa phát biểu ở trên ta chứng minh được kết quả sau.

**Định lý 6.1.6** *a) Nếu $f$ đơn điệu trên $[a; b]$ thì $f \in \mathcal{R}([a; b])$.*

*b) Nếu $f$ liên tục trên $[a; b]$ thì $f \in \mathcal{R}([a; b])$.*

**Chứng minh:** a) Không mất tính tổng quát ta giả sử $f$ đơn điệu tăng trên $[a; b]$. Dễ thấy $f$ bị chặn trên $[a; b]$. Lấy $\epsilon > 0$ tùy ý. Khi đó ta chọn một số $k > 0$ sao cho $k[f(b) - f(a)] < \epsilon$ và chọn phân hoạch $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ sao cho $x_{i+1} - x_i < k$ với $i$ từ $1, 2, \ldots, n$.

Vì $f$ đơn điệu tăng trên $[a; b]$ nên $M_i(f) = f(x_{i+1})$ và $m_i(f) = f(x_i)$. Do đó

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i+1}) - f(x_i)][x_{i+1} - x_i] \le k[f(b) - f(a)] < \epsilon.$$

Vậy $f \in \mathcal{R}([a; b])$.

b) Nếu $f$ liên tục trên $[a; b]$ thì $f$ bị chặn và liên tục đều trên $[a; b]$. Do đó với $\epsilon > 0$ tùy ý thì có số $\delta > 0$ sao cho với mọi $x, y \in [a; b]$, nếu $|x - y| < \delta$ thì $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$.

Chọn phân hoạch $P = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ sao cho $x_{i+1} - x_i < \delta$ với $i = 1, 2, \dots, n$. Do $f$ liên tục trên $[x_i; x_{i+1}]$ nên có các số $s_i, t_i \in [x_i; x_{i+1}]$ sao cho $M_i(f) = f(s_i)$ và $m_i(f) = f(t_i)$ với $i = 1, 2, \dots, n$. Chú ý là $|s_i - t_i| \le x_{i+1} - x_i < \delta$ nên ta suy ra

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} [f(s_i) - f(t_i)][x_{i+1} - x_i] < \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{b-a}[x_{i+1} - x_i] = \epsilon.$$

Vậy $f \in \mathcal{R}([a; b])$.

□

### 6.1.2 Tổng Riemann

Giả sử $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ là một hàm số bị chặn và $P = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ là một phân hoạch của $[a; b]$. Ta gọi $\mu(P)$ là độ dài lớn nhất trong số các độ dài của các đoạn $[x_i; x_{i+1}]$, $i$ từ $1, 2, \dots, n$.

Nếu trên mỗi đoạn $[x_i; x_{i+1}]$, $i$ từ $1, 2, \dots, n$ ta đã chọn ra một số $t_i \in [x_i; x_{i+1}]$ thì ta nói phân hoạch $P$ **đã được đánh dấu**, và tổng dưới đây

$$S(P, f) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_{i+1} - x_i)$$

được gọi là **một tổng Riemann** của $f$ ứng với $P$.

Ta có các đặc trưng về tính khả tích thông qua tổng Riemann sau đây.

**Định lý 6.1.7** *$f \in \mathcal{R}([a; b])$ khi và chỉ khi tồn tại một số thực $I$ thỏa mãn điều kiện: với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại một phân hoạch $P$ của $[a; b]$ sao cho với mọi phân hoạch $Q$ mịn hơn $P$ và với mọi cách đánh dấu $Q$, ta đều có $|S(Q, f) - I| < \epsilon$.*

*Ngoài ra, nếu $f$ thỏa mãn điều kiện được phát biểu như trên thì $\int\limits_a^b f(x)dx = I$.*

**Chứng minh:** Giả sử $f \in \mathcal{R}([a; b])$. Gọi $I = \int\limits_a^b f(x)dx$ và lấy $\epsilon > 0$ tùy ý. Khi đó tồn tại một phân hoạch $P$ của $[a; b]$ sao cho $U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$. Xét phân hoạch bất kỳ $Q$ mịn hơn $P$ và $Q$ được đánh dấu tùy ý. Ta có

$$L(P, f) \le L(Q, f) \le S(Q, f) \le U(Q, f) \le U(P, f) < L(P, f) + \epsilon$$

và

$$L(Q, f) \le I = \int\limits_a^b f(x)dx \le U(Q, f).$$

Do đó $|S(Q, f) - I| < \epsilon$.

Đảo lại giả sử $f$ thỏa mãn điều kiện được phát biểu trong định lý. Lấy $\epsilon > 0$ tùy ý. Khi đó có một phân hoạch $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ của $[a; b]$ sao cho với mọi cách đánh dấu $P$ ta đều có

$$|S(P, f) - I| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Chú ý là với $i = 1, 2, \ldots, n$, tồn tại các số $s_i, t_i \in [x_i; x_{i+1}]$ sao cho

$$M_i(f) - \frac{\epsilon}{4(b-a)} < f(t_i)$$

và

$$m_i(f) + \frac{\epsilon}{4(b-a)} > f(s_i).$$

Do đó ta suy ra

$$U(P, f) - L(P, f) \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) - I - [\sum_{i=1}^{n} f(s_i)(x_{i+1} - x_i) - I] < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Từ đó ta suy ra $U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$, tức là $f \in \mathcal{R}([a; b])$. Ta còn phải chỉ ra $\int\limits_a^b f(x)dx = I$. Thật vậy, lấy $\epsilon > 0$ tùy ý, tồn tại một phân hoạch $P_1$ của $[a; b]$ sao cho với mọi phân hoạch $Q$ mịn hơn $P_1$ và với mọi cách đánh dấu $Q$, ta có

$$|S(Q, f) - I| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Do $f \in \mathcal{R}([a; b])$ nên có một phân hoạch $P_2$ của $[a; b]$ sao cho

$$U(P_2, f) - L(P_2, f) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Đặt $Q = P_1 \cup P_2$. Khi đó ta suy ra

$$\begin{aligned} \left| I - \int_a^b f(x)dx \right| &\leq |I - S(Q, f)| + |S(Q, f) - L(Q, f)| + \left| L(Q, f) - \int_a^b f(x)dx \right| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Vì $\epsilon > 0$ tùy ý nên $\int\limits_a^b f(x)dx = I$.

□

**Định lý 6.1.8** *$f \in \mathcal{R}([a;b])$ khi và chỉ khi tồn tại một số thực $I$ thỏa mãn điều kiện: với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi phân hoạch $P$ của $[a;b]$ với $\mu(P) < \delta$ và với mọi cách đánh dấu $P$, ta đều có $|S(P,f) - I| < \epsilon$.*
*Nếu $f$ thỏa mãn điều kiện được phát biểu như trên thì ta còn viết là*

$$\lim_{\mu(P)\to 0} S(P,f) = I.$$

*Hơn nữa ta có $\int\limits_a^b f(x)dx = I$.*

Ta xét ví dụ sau đây.

**Ví dụ 6.1.9** *Tính $\int\limits_0^1 xdx$.*

**Lời giải:** Vì hàm số $f(x) = x$ liên tục trên $[0;1]$ nên khả tích trên $[0;1]$. Ta chia đều $[0;1]$ thành $n$ đoạn bằng nhau bởi các điểm chia

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < 1.$$

Khi đó nếu chọn $t_i = \frac{i}{n}$ thì

$$S(P,f) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Khi $\mu(P) = \frac{1}{n} \to 0$ thì $n \to +\infty$ và $S(P,f) \to \frac{1}{2}$. Giới hạn này không phụ thuộc vào cách chia $[0;1]$ và cách chọn các điểm $t_i$ và giới hạn đó chính là tích phân cần tìm.

### 6.1.3 Các tính chất cơ bản của tích phân xác định

**Định lý 6.1.10** *Cho $f, g$ khả tích trên $[a;b]$. Khi đó ta có các khẳng định sau.*

*(i) Với $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ta có $c_1 f + c_2 g$ khả tích trên $[a;b]$ và*

$$\int\limits_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx = c_1 \int\limits_a^b f(x)dx + c_2 \int\limits_a^b g(x)dx.$$

*(ii) Nếu $f(x) \le g(x)$ với mọi $x \in [a;b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$.*

**Chứng minh:** (i) Lấy $\epsilon > 0$ tùy ý. Chọn $k > 0$ sao cho $(|c_1| + |c_2|)k < \epsilon$. Khi đó có các phân hoạch $P_1$ và $P_2$ sao cho với bất kỳ phân hoạch $Q_i$ mịn hơn $P_i$, với mọi cách đánh dấu $Q_i$, ta có

$$\left|S(Q_1, f) - \int\limits_a^b f(x)dx\right| < k,$$

$$\left|S(Q_2, g) - \int\limits_a^b g(x)dx\right| < k.$$

Đặt $P = P_1 \cup P_2$ và lấy $Q$ là một phân hoạch tùy ý mịn hơn $P$. Rõ ràng $Q$ mịn hơn $P_1$ và $P_2$. Khi đó với mọi cách đánh dấu $Q$ ta có

$$\begin{aligned}
&\left|S(Q, c_1 f + c_2 g) - \left[c_1 \int\limits_a^b f(x)dx + c_2 \int\limits_a^b g(x)dx\right]\right| \\
&= \left|c_1 S(Q, f) + c_2 S(Q, g) - \left[c_1 \int\limits_a^b f(x)dx + c_2 \int\limits_a^b g(x)dx\right]\right| \\
&\leq (|c_1| + |c_2|)k < \epsilon.
\end{aligned}$$

Do đó theo Định lý 6.1.7 ta suy ra $c_1 f + c_2 g$ khả tích trên $[a; b]$ và

$$\int\limits_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx = c_1 \int\limits_a^b f(x)dx + c_2 \int\limits_a^b g(x)dx.$$

(ii) Nếu $f(x) \leq g(x)$ với mọi $x \in [a; b]$ thì với mọi phân hoạch $P$ ta đều có $L(P, f) \leq L(P, g)$. Do đó $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$.

□

**Định lý 6.1.11** *$f$ khả tích trên $[a; b]$ khi và chỉ khi $f$ khả tích trên các đoạn $[a; c]$ và $[c; b]$ $(a < c < b)$. Ngoài ra*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

**Chứng minh:** Giả sử $f$ khả tích trên $[a; b]$. Lấy $\epsilon > 0$ tùy ý. Khi đó có một phân hoạch $P$ của $[a; b]$ sao cho

$$U(P, f) - L(P, f) < \epsilon.$$

Đặt $Q = P \cup \{c\},\ Q_1 = Q \cap [a;c],\ Q_2 = Q \cap [c;b]$. Ta có

$$\begin{aligned}
\epsilon > U(P,f) - L(P,f) &\geq U(Q,f) - L(Q,f) \\
&= U(Q_1,f) + U(Q_2,f) - L(Q_1,f) - L(Q_2,f) \\
&= U(Q_1,f) - L(Q_1,f) + U(Q_2,f) - L(Q_2,f).
\end{aligned}$$

Vậy ta thu được $U(Q_1,f) - L(Q_1,f) < \epsilon$ và $U(Q_2,f) - L(Q_2,f) < \epsilon$. Theo Định lý 6.1.5 ta suy ra $f$ khả tích trên các đoạn $[a;c]$ và $[c;b]$.

Đảo lại, giả sử $f$ khả tích trên các đoạn $[a;c]$ và $[c;b]$. Lấy $\epsilon > 0$ tùy ý. Khi đó có các phân hoạch $P_1$ của $[a;c]$ và phân hoạch $P_2$ của $[c;b]$ sao cho với mọi phân hoạch $Q_1$ mịn hơn $P_1$, với mọi phân hoạch $Q_2$ mịn hơn $P_2$, với mọi cách đánh dấu $Q_1$ và $Q_2$, ta có

$$\left| S(Q_1,f) - \int\limits_a^c f(x)dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

và

$$\left| S(Q_2,f) - \int\limits_c^b f(x)dx \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Đặt $P = P_1 \cup P_2$ thì $P$ là một phân hoạch của $[a;b]$. Lấy $Q$ là một phân hoạch tùy ý mịn hơn $P$. Khi đó nếu đặt $Q_1 = Q \cap [a;c],\ Q_2 = Q \cap [c;b]$ thì $Q_1$ là một phân hoạch của $[a;c]$ và mịn hơn $P_1$ còn $Q_2$ là một phân hoạch của $[c;b]$ và mịn hơn $P_2$. Từ đây ta thấy

$$\begin{aligned}
&\left| S(Q,f) - \left[ \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx \right] \right| \\
&= \left| S(Q_1,f) + S(Q_2,f) - \left[ \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx \right] \right| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Do đó theo Định lý 6.1.7 ta suy ra $f$ khả tích trên đoạn $[a;b]$ và

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

□

Định lý sau đây cho ta biết một điều kiện đủ về tính khả tích của hàm hợp.

**Định lý 6.1.12** *Giả sử $f : [a;b] \to [c;d]$ khả tích trên $[a;b]$, $g : [c;d] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[c;d]$. Khi đó $g \circ f$ khả tích trên $[a;b]$.*

**Chứng minh:** Lấy $\epsilon > 0$ tùy ý. Gọi $M = \sup\{|g(t)| : t \in [c;d]\}$ và chọn số $k > 0$ sao cho $k[b-a+2M] < \epsilon$. Do tính liên tục đều của $g$ trên $[c;d]$ nên có $0 < \delta < k$ sao cho: với mọi $s, t \in [c;d]$, nếu $|s-t| < \delta$ thì $|g(s) - g(t)| < k$.

Theo giả thiết $f$ khả tích trên $[a;b]$ nên có $P$ là một phân hoạch của $[a;b]$ sao cho

$$U(P,f) - L(P,f) < \delta^2.$$

Gọi $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$. Ta đặt

$$A = \{i \in [1;n] : M_i(f) - m_i(f) < \delta\}$$

và

$$B = \{i \in [1;n] : M_i(f) - m_i(f) \geq \delta\}.$$

Khi đó, với $i \in A$ và $x, y \in [x_i, x_{i+1}]$ ta suy ra $|f(x) - f(y)| \leq M_i(f) - m_i(f) < \delta$, do đó $|g(f(x)) - g(f(y))| < k$ và $M_i(g \circ f) - m_i(g \circ f) \leq k$.

Mặt khác ta có

$$\delta \sum_{i \in B} (x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i \in B} [(M_i(f) - m_i(f)](x_{i+1} - x_i) \leq U(P,f) - L(P,f) < \delta^2.$$

Vậy $\sum\limits_{i \in B} (x_{i+1} - x_i) \leq \delta$.

Kết hợp các kết quả trên, ta thu được các đánh giá sau đây

$$\begin{aligned}
U(P, g\circ f) - L(P, g \circ f) &= \sum_{1}^{n} [M_i(g\circ f) - m_i(g \circ f)](x_{i+1} - x_i) \\
&= \sum_{i \in A} [M_i(g\circ f) - m_i(g \circ f)](x_{i+1} - x_i) + \sum_{i \in B} [M_i(g\circ f) - m_i(g \circ f)](x_{i+1} - x_i) \\
&\leq k(b-a) + 2M\delta \leq k(b-a+2M) < \epsilon.
\end{aligned}$$

Do đó theo Định lý 6.1.5 ta suy ra $g \circ f$ khả tích trên $[a;b]$.

□

**Nhận xét 6.1.13** *Trong định lý trên, nếu ta thay điều kiện $g$ liên tục trên $[c;d]$ bởi điều kiện yếu hơn là $g$ khả tích trên $[c;d]$ thì không đảm bảo $g \circ f$ sẽ khả tích trên $[a;b]$. (Xem phần bài tập cuối chương)*

**Hệ quả 6.1.14** *Nếu $f, g$ khả tích trên $[a;b]$ thì $fg$ và $|f|$ khả tích trên $[a;b]$, hơn nữa*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

**Chứng minh:** Bài tập.

**Định lý 6.1.15 (Định lý giá trị trung bình cho tích phân)** *Cho hàm số $f, g$ khả tích trên $[a;b]$, $m \le f(x) \le M$ và $g(x) \ge 0$ với mọi $x \in [a;b]$. Khi đó tồn tại $\mu \in [m;M]$ sao cho*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

*Ngoài ra, nếu có thêm $f$ liên tục trên $[a;b]$ thì tồn tại $c \in [a;b]$ sao cho*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

*Đặc biệt với $g(x) = 1$ và $f$ liên tục trên $[a;b]$ thì tồn tại $c \in [a;b]$ sao cho*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

**Chứng minh:** Bài tập.

### 6.1.4 Định lý cơ bản của Giải tích

Cho hàm số $f$ khả tích trên $[a;b]$ thì ta biết rằng $f$ khả tích trên đoạn $[a;x]$ với mọi $x \in [a;b]$. Do đó hàm số $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ xác định trên đoạn $[a;b]$.

**Định lý 6.1.16** *(i) Nếu $f$ khả tích trên $[a;b]$ thì $F$ liên tục trên $[a;b]$.*
*(ii) Nếu $f$ liên tục trên $[a;b]$ thì $F$ khả vi trên $[a;b]$ và $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in [a;b]$.*

**Chứng minh:** (i) Gọi $M > 0$ sao cho $|f(x)| \le M$ với mọi $x \in [a;b]$. Ta có với mọi $x, y \in [a;b]$, $x < y$

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x f(x)dx - \int_a^y f(x)dx \right| = \left| \int_x^y f(x)dx \right| \le \int_x^y |f(x)|dx \le M|x-y|.$$

Vậy $F$ là hàm số Lipschitz nên liên tục trên $[a;b]$.

(ii) Giả sử $f$ liên tục tại $x_0 \in [a;b]$. Lấy $\epsilon > 0$ tùy ý và chọn số $\delta > 0$ sao cho với $y \in [a;b]$, nếu $|y - x_0| < \delta$ thì $|f(y) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$. Do đó, với $0 < |y - x_0| < \delta$, ta có

$$\left| \frac{F(y) - F(x_0)}{y - x_0} - f(x_0) \right| = \frac{1}{|y - x_0|} \left| \int_{x_0}^y [f(x) - f(x_0)]dx \right| \le \frac{1}{|y - x_0|} |y - x_0| \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Do đó $F$ khả vi trên $[a;b]$ và $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in [a;b]$.

□

**Định lý cơ bản của Giải tích** là kết quả sau đây (thường được gọi là **công thức Newton-Leibniz**).

**Định lý 6.1.17** *(i) Nếu $f$ liên tục trên $[a;b]$ thì tồn tại một nguyên hàm $F$ của $f$ trên $[a;b]$ (tức là $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in [a;b]$). Hơn nữa nếu $G$ là một nguyên hàm bất kỳ của $f$ trên $[a;b]$ thì ta luôn có*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

*(ii) Nếu $f$ khả tích trên $[a;b]$ và $f$ có một nguyên hàm $F$ nào đó trên $[a;b]$ thì*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

**Chứng minh:** (i) Theo Định lý 6.1.16, nếu $f$ liên tục trên $[a;b]$ thì tồn tại một nguyên hàm $F$ của $f$ trên $[a;b]$, với $F(x) = \int\limits_a^x f(x)dx$. Giả sử $G$ là một nguyên hàm bất kỳ của $f$ trên $[a;b]$. Khi đó ta có $G'(x) = F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in [a;b]$. Vậy $G(x) = F(x) + C$ với mọi $x \in [a;b]$. Tử kết quả này, cho $x = a$ ta thấy $C = G(a)$. Cuối cùng thay $x = b$ vào $G(x) = F(x) + G(a)$ ta được

$$\int\limits_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

(ii) Vì $f$ có một nguyên hàm $F$ trên $[a;b]$ nên $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in [a;b]$. Do $f$ khả tích trên $[a;b]$ nên $F'$ cũng khả tích trên $[a;b]$. Lấy $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ là một phân hoạch tùy ý của $[a;b]$. Áp dụng Định lý Lagrange cho hàm $F$ trên các đoạn $[x_i; x_{i+1}]$, ta tìm được các số $t_i \in [x_i; x_{i+1}]$ sao cho

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(t_i)(x_{i+1} - x_i) = f(t_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Từ các kết quả trên ta suy ra

$$\sum_1^n f(t_i)(x_{i+1} - x_i) = F(b) - F(a).$$

Cuối cùng chú ý là

$$L(P, f) \le \sum_1^n f(t_i)(x_{i+1} - x_i) = F(b) - F(a) \le U(P, f).$$

Vì $P$ là một phân hoạch tùy ý của $[a;b]$ nên từ đánh giá trên ta có ngay

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

□

Một áp dụng quan trọng của Định lý cơ bản của Giải tích là kết quả sau.

**Định lý 6.1.18 (Công thức đổi biến số)** *Giả sử $g$ khả vi trên $[a;b]$ và $g'$ khả tích trên $[a;b]$. Khi đó nếu $f$ liên tục trên $X = g([a;b])$ thì*

$$\int\limits_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt.$$

**Chứng minh:** Gọi $F$ là hàm số xác định trên $X = g([a;b])$ bởi $F(t) = \int\limits_{g(a)}^{t} f(t)dt$.
Khi đó ta có với mọi $t \in X$, $F'(t) = f(t)$ và với mọi $x \in [a;b]$

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Theo Định lý cơ bản của Giải tích, ta suy ra

$$\int\limits_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int\limits_a^b (F \circ g)'(x)dx = (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt.$$

□

## 6.2 TÍCH PHÂN SUY RỘNG

Ở phần trước ta đã xây dựng khái niệm tích phân xác định với các cận lấy tích phân hữu hạn cho các hàm số bị chặn. Nhiều ứng dụng trong thực tế cần đến việc tính tích phân với các cận vô hạn hoặc hàm số lấy tích phân không bị chặn. Các tích phân mở rộng này được gọi là các tích phân suy rộng.

### 6.2.1 Tích phân suy rộng với cận vô hạn

Gọi $\mathcal{R}_{\text{loc}}([a;+\infty))$ là tập hợp các hàm số xác định trên $[a;+\infty)$ và khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a;c]$. Khi đó với $f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}([a;+\infty))$ ta có hàm số

$$F(c) = \int\limits_a^c f(x)dx$$

xác định trên $[a;+\infty)$.

**Định nghĩa 6.2.1** *Cho* $f \in \mathcal{R}_{loc}([a;+\infty))$. *Giới hạn (nếu có) của hàm số* $F(c) = \int_a^c f(x)dx$ *khi* $c \to +\infty$ *được gọi là tích phân suy rộng của* $f$ *trên* $[a;+\infty)$, *ký hiệu* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

*Vậy* $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)dx$.

*Nếu giới hạn* $\lim\limits_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)dx$ *hữu hạn ta nói tích phân suy rộng* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ (hoặc* $f$ *khả tích trên* $[a;+\infty)$*). Ngược lại ta nói tích phân suy rộng* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *phân kỳ.*

Tương tự ta cũng có thể định nghĩa các tích phân suy rộng trên $(-\infty;a]$ và $(-\infty;+\infty)$ như sau:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^a f(x)dx$$

và

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

nếu phép tính ở vế phải xác định.

**Ví dụ 6.2.2** $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim\limits_{c\to+\infty} \int_0^c \frac{1}{1+x^2}dx = \lim\limits_{c\to+\infty} \arctan c = \frac{\pi}{2}$.

Ví dụ quan trọng sau đây được sử dụng nhiều trong thực hành.

**Ví dụ 6.2.3** *Cho* $a > 0$. *Khi đó*

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$$

*hội tụ khi và chỉ khi* $p > 1$.

**Sự hội tụ của tích phân suy rộng khi $f(x) \geq 0$.**

Giả sử $f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}([a;+\infty))$ và $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a;+\infty)$. Khi đó hàm số

$$F(c) = \int_a^c f(x)dx$$

là hàm số tăng trên $[a;+\infty)$. Do đó tích phân suy rộng $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi

$$F(c) = \int\limits_a^c f(x)dx$$

là hàm số bị chặn trên, tức là tồn tại số dương $M$ sao cho

$$F(c) = \int\limits_a^c f(x)dx \leq M, \forall c \in [a;+\infty).$$

Dựa vào nhận xét trên, ta chứng minh được các định lý so sánh dưới đây.

**Định lý 6.2.4 (Dấu hiệu so sánh thứ nhất)** *Giả sử $f, g \in \mathcal{R}_{loc}([a;+\infty))$ sao cho $0 \leq f(x) \leq g(x)$ với mọi $x \in [a;+\infty)$. Khi đó*

$$0 \leq \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx.$$

*Đặc biệt ta có các kết luận sau.*

*a) Nếu $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.*

*b) Nếu $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ.*

**Định lý 6.2.5 (Dấu hiệu so sánh thứ hai)** *Giả sử $f, g \in \mathcal{R}_{loc}([a;+\infty))$ sao cho $0 \leq f(x)$ và $0 \leq g(x)$ với mọi $x \in [a;+\infty)$ và*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \, (0 \leq k \leq +\infty).$$

*Khi đó ta có các kết luận sau.*

*a) Nếu $k > 0$ thì các tích phân $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ và $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*

*b) Nếu $k = 0$ thì $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ kéo theo $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.*

*c) Nếu $k = +\infty$ thì $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ kéo theo $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.*

Các định lý so sánh sẽ được chứng minh trong giờ lý thuyết. Trong thực hành ta thường so sánh $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ với tích phân $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$.

**Ví dụ 6.2.6** *Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau:*

*a)* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx.$

*b)* $\int\limits_1^{+\infty} (\frac{\pi}{2} - \arctan x)dx.$

**Lời giải:** a) Ta so sánh $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ với $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$. Ta có $\frac{\sqrt{x}}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^{3/2}}$, với mọi $x \geq 1$. Mà $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}dx$ hội tụ nên $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$ hội tụ.

b) Ta so sánh $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ với $g(x) = \frac{1}{x}$ (tại sao ta đoán được hàm g?).
Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1$. Mà $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ phân kỳ nên $\int\limits_1^{+\infty} (\frac{\pi}{2} - \arctan x)dx$ phân kỳ.

□

**Sự hội tụ của tích phân suy rộng khi $f(x)$ có dấu tùy ý.**

Trong trường hợp $f(x)$ có dấu tùy ý, sự tồn tại giới hạn hữu hạn của hàm số

$$F(c) = \int_a^c f(x)dx$$

khi $c \to +\infty$ được suy ra từ tiêu chuẩn Cauchy về sự tồn tại giới hạn hữu hạn của hàm số.

**Định lý 6.2.7** *Giả sử $f \in \mathcal{R}_{loc}([a; +\infty))$. Khi đó $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại A>0 sao cho với mọi $c_2 > c_1 > A$ ta luôn có*

$$|F(c_2) - F(c_1)| = |\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx| < \epsilon.$$

Ta có ngay hệ quả sau.

**Định lý 6.2.8 (Dấu hiệu hội tụ tuyệt đối)** *Giả sử $f \in \mathcal{R}_{loc}([a; +\infty))$. Khi đó nếu $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.*

**Chứng minh:** Áp dụng Định lý 6.2.7 cho tích phân $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ và chú ý là

$$|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx| \leq \int_{c_1}^{c_2} |f(x)|dx.$$

$\square$

Chú ý là chiều ngược lại của định lý trên không đúng (xem phần bài tập). Do đó người ta phân biệt hai trường hợp sau.

- Nếu $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì ta nói $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối.
- Nếu $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ phân kỳ mà $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì ta nói $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ bán hội tụ.

Ngoài dấu hiệu hội tụ tuyệt đối nêu trên, ta còn có hai dấu hiệu khác rất hữu ích khi nghiên cứu sự hội tụ của tích phân suy rộng của một hàm có dấu tùy ý.

**Định lý 6.2.9 (Dấu hiệu Abel)** *Giả sử các hàm số $f$ và $g$ xác định trên $[a; +\infty)$ và*

*(i) $f$ khả tích trên $[a; +\infty)$,*

*(ii) $g$ đơn điệu và bị chặn trên $[a; +\infty)$.*

*Khi đó tích phân $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ hội tụ.*

**Định lý 6.2.10 (Dấu hiệu Dirichlet)** *Giả sử các hàm số $f$ và $g$ xác định trên $[a; +\infty)$ và*

*(i) $f$ khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a; A]$ với mọi $A \in [a; +\infty)$ và $F(A) = \int\limits_a^A f(x)dx$ bị chặn trên $[a; +\infty)$,*

*(ii) $g$ đơn điệu trên $[a; +\infty)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.*

*Khi đó tích phân $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ hội tụ.*

### 6.2.2 Tích phân suy rộng của hàm số không bị chặn

Gọi $\mathcal{R}_{\text{loc}}([a; b))$ là tập hợp các hàm số xác định trên $[a; b)$ và khả tích trên mọi đoạn $[a; c]$, $a \le c < b$. Khi đó nếu $f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}([a; b))$ thì hàm số

$$F(c) = \int\limits_a^c f(x)dx$$

xác định trên $[a; b)$. Nếu $f$ không bị chặn trên $[c; b)$ với mọi $a \le c < b$ thì ta gọi $b$ là điểm bất thường.

**Định nghĩa 6.2.11** *Cho* $f \in \mathcal{R}_{loc}([a;b))$*. Giới hạn (nếu có) của hàm số* $F(c) = \int_a^c f(x)dx$ *khi* $c \to b^-$ *được gọi là tích phân suy rộng của* $f$ *trên* $[a;b)$*, ký hiệu* $\int_a^b f(x)dx$*. Vậy* $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx$*.*

Nếu giới hạn $\lim\limits_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx$ hữu hạn ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ (hoặc $f$ khả tích trên $[a;b)$). Ngược lại ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Tương tự ta cũng có thể định nghĩa tích phân suy rộng trên $(a;b]$ như sau:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)dx.$$

**Nhận xét 6.2.12** *Nếu một hàm số* $f$ *bị chặn và khả tích Riemann trên* $[a;b]$ *thì nó cũng khả tích trên* $[a;b)$ *theo nghĩa suy rộng như trên. Ngoài ra tích phân suy rộng và tích phân xác định của* $f$ *là trùng nhau. Thật vậy, gọi* $M = \sup\limits_{a\le x\le b} |f(x)|$*, ta có*

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^c f(x)dx\right| = \left|\int_c^b f(x)dx\right| \le \int_c^b |f(x)|dx \le M(b-c).$$

*Cho* $c \to b^-$ *ta có ngay nhận xét trên.*

**Ví dụ 6.2.13** $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim\limits_{c\to 1^-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim\limits_{c\to 1^-} \arcsin c = \frac{\pi}{2}$.

Ví dụ quan trọng sau đây được sử dụng nhiều trong thực hành.

**Ví dụ 6.2.14** *Cho* $b > a$*. Khi đó các tích phân*

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx, \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}dx$$

*hội tụ khi và chỉ khi* $p < 1$*.*

Tương tự như trường hợp tích phân suy rộng với cận vô hạn, đối với tích phân suy rộng của hàm số không bị chặn ta cũng có các kết quả tương tự về sự hội tụ. Chẳng hạn ta có các kết quả sau đây cho trường hợp cận $b$ là điểm bất thường.

**Định lý 6.2.15** *Giả sử* $f, g \in \mathcal{R}_{loc}([a;b))$ *sao cho* $0 \le f(x) \le g(x)$ *với mọi* $x \in [a;b)$. *Khi đó*

$$0 \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

*Đặc biệt ta có các kết luận sau.*

*a) Nếu* $\int_a^b g(x)dx$ *hội tụ thì* $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ.*

*b) Nếu* $\int_a^b f(x)dx$ *phân kỳ thì* $\int_a^b f(x)dx$ *phân kỳ.*

**Định lý 6.2.16** *Giả sử* $f, g \in \mathcal{R}_{loc}([a;b))$ *sao cho* $0 \le f(x)$ *và* $0 \le g(x)$ *với mọi* $x \in [a;b)$ *và*

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = k\,(0 \le k \le +\infty).$$

*Khi đó ta có các kết luận sau.*

*a) Nếu* $k > 0$ *thì* $\int_a^b g(x)dx$ *và* $\int_a^b f(x)dx$ *cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*

*b) Nếu* $k = 0$ *thì* $\int_a^b g(x)dx$ *hội tụ kéo theo* $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ.*

*c) Nếu* $k = +\infty$ *thì* $\int_a^b g(x)dx$ *phân kỳ kéo theo* $\int_a^b f(x)dx$ *phân kỳ.*

**Định lý 6.2.17** *Giả sử* $f \in \mathcal{R}_{loc}([a;b))$. *Khi đó nếu* $\int_a^b |f(x)|dx$ *hội tụ thì* $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ.*

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 6

1) Không dùng công thức Newton-Leibniz hãy tính tích phân $\int_0^1 x^2 dx$.

2) Chứng minh rằng hàm số $f$ xác định trên $[0;1]$ bởi $f(0) = 0$ và $f(x) = 1$ nếu $x \neq 0$ là khả tích trên $[0;1]$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

3) Chứng minh Hệ quả 6.1.14.

4) Cho ví dụ về một hàm $f$ xác định trên $[0;1]$ sao cho $|f|$ khả tích trên $[0;1]$ nhưng $f$ không khả tích trên $[0;1]$.

5) Cho $f$ liên tục và không âm trên $[0;1]$. Giả sử $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Chứng minh $f(x) = 0$ với mọi $x \in [0;1]$.

6) Chứng minh Định lý 6.1.15.

7) Cho $f$ đơn điệu trên $[a;b]$. Chứng minh rằng có $c \in [a;b]$ sao cho

$$\int_a^b f(x)dx = f(a)(c-a) + f(b)(b-c).$$

(Hướng dẫn: Áp dụng định lý giá trị trung gian cho hàm số liên tục $h$ trên $[a;b]$, với $h(x) = f(a)(x-a) + f(b)(b-x)$)

8*) Cho hàm số Riemann

$$R(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x \in \mathbb{Q}^c \\ \frac{1}{n} & \text{nếu} \quad x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, (m,n) = 1, n \in mathbbN. \end{cases}$$

Chứng minh hàm Riemann $R$ khả tích trên $[0;1]$.

9*) Cho ví dụ về một hàm $f : [0;1] \to [0;1]$ và một hàm $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ sao cho cả $f$ và $g$ đều khả tích trên $[0;1]$ nhưng $g \circ f$ không khả tích trên $[0;1]$. (Hướng dẫn: Xét hai hàm ở bài tập 2 và 8.)

10) Chứng minh rằng hàm số $f$ xác định trên $[0;1]$ bởi $f(0) = 0$ và $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x^2})$ nếu $x \neq 0$ là khả vi trên $[0;1]$ nhưng $f'$ không khả tích trên $[0;1]$.

11) Cho $f$ liên tục trên $[0;1]$ và $\int_0^t f(x)dx = \int_t^1 f(x)dx$ với mọi $t \in [0;1]$. Chứng minh

$f(t) = 0$ với mọi $t \in [0; 1]$.

12) Cho $f, g$ liên tục trên $[a; b]$ sao cho $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx$. Chứng minh có $c \in [a; b]$ sao cho $f(c) = g(c)$.

13) Tính các tích phân suy rộng

a) $\int\limits_3^{+\infty} \frac{1}{x^2-3x+2}dx$

b) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}dx$

c) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos xdx \ (a > 0)$

d) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

14) Tính các tích phân suy rộng

a) $\int\limits_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$

b) $\int\limits_0^1 \ln xdx$

c) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

d) $\int\limits_0^1 x\ln^2 xdx$

15) Xét sự hội tụ của các tích phân sau

a) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^7-3x+2}}dx$

b) $\int\limits_1^{+\infty} (1-\cos\frac{2}{x})dx$

c) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}(e^{\frac{1}{x}} - \cos\frac{1}{x})dx$

d) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2}dx$

16) Xét sự hội tụ của các tích phân sau

a) $\int\limits_0^1 \frac{x}{\sin^2 x}dx$

b) $\int\limits_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx$

c) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$

d) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx$

e) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx$

17) Tìm $p \in \mathbb{R}$ sao cho các tích phân sau đây hội tụ

a) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x}dx$

b*) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$

18) Chứng minh $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ hội tụ nhưng $\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ phân kỳ.

19*) a) Chứng minh rằng $I(a) = \int\limits_0^a \frac{dx}{\ln x\sqrt{x}}$ hội tụ khi khi $a < 1$.

b) Tính $\lim\limits_{a\to 0^+} I(a)\ln a$.

20)* a) Chứng minh rằng $\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ hội tụ khi và chỉ khi $p > 0$.

b) Đặt $\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ với $p > 0$. Chứng minh $\Gamma(n) = (n-1)!$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

# Chương 7

# CHUỖI SỐ-CHUỖI HÀM

## 7.1 CHUỖI SỐ

### 7.1.1 Các khái niệm cơ bản

Cho dãy số $(a_n)$. Ta gọi tổng vô hạn dưới đây

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

là một chuỗi số có số hạng tổng quát là $a_n$.
Ta gọi **tổng riêng thứ** $n$ của chuỗi số trên là tổng hữu hạn sau đây

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

**Định nghĩa 7.1.1** *Nếu dãy các tổng riêng* $(S_n)$ *có giới hạn là* $S$ *thì ta gọi* $S$ *là tổng của chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và viết là* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.
*Nếu* $S \in \mathbb{R}$ *thì ta nói chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***hội tụ về*** $S$. *Trong các trường hợp khác thì ta nói chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***phân kỳ***.

Từ định nghĩa về tổng của một chuỗi số ta có ngay nhận xét sau.

**Nhận xét 7.1.2** *a) Nếu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = B$ *thì*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$$

*nếu vế phải xác định.*

*b) Giả sử chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ về* $S$*. Ta gọi* $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ *là* **phần dư của chuỗi sau số hạng thứ** $n$*. Rõ ràng* $S_n + R_n = S$ *và do* $\lim S_n = S$ *nên* $\lim R_n = 0$*.*

*c) Sự hội tụ của chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *không phụ thuộc vào hữu hạn các số hạng đầu tiên. Nói cách khác chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ khi và chỉ khi chuỗi phần dư* $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ *hội tụ với mọi* $n \in \mathbb{N}$*.*

Kết quả bên dưới cho ta một điều kiện cần để kiểm tra một chuỗi số hội tụ.

**Định lý 7.1.3** *Nếu chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ thì* $\lim a_n = 0$*. Nói cách khác nếu dãy* $(a_n)$ *không hội tụ về 0 thì chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ.*

**Chứng minh:** Do chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nên $\lim S_n = S \in \mathbb{R}$. Khi đó $\lim S_{n-1} = S$ và $\lim a_n = \lim(S_n - S_{n-1}) = 0$.

□

**Ví dụ 7.1.4** *Chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ *hội tụ khi và chỉ khi* $|q| < 1$*.*

Áp dụng tiêu chuẩn Cauchy về sự hội tụ cho dãy số $(S_n)$ ta có khẳng định sau.

**Định lý 7.1.5** *Chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ khi và chỉ khi với mọi* $\epsilon > 0$*, tồn tại* $N \in \mathbb{N}$ *sao cho* $\forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}$ *ta có*

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon.$$

**Định lý 7.1.6** *Nếu chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *hội tụ thì chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ.*

**Chứng minh:** Áp dụng Định lý 7.1.5 cho các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, với chú ý là

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}|.$$

□

Chú ý là chiều ngược lại của Định lý 7.1.6 không đúng. Do đó người ta chia thành hai trường hợp như sau.

- Nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ thì ta nói chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **hội tụ tuyệt đối**.

- Nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ phân kỳ và chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì ta nói $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **bán hội tụ**.

Trong trường hợp chuỗi số có các số hạng không âm thì ta có kết quả sau đây về sự hội tụ của chuỗi số.

**Định lý 7.1.7** *Chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *(*$a_n \geq 0$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}$*) hội tụ khi và chỉ khi dãy các tổng riêng* $(S_n)$ *bị chặn trên.*

**Chứng minh:** Chú ý là $a_n \geq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ nên $(S_n)$ là dãy tăng. Do đó $(S_n)$ hội tụ khi và chỉ khi $(S_n)$ bị chặn trên.

□

### 7.1.2 Các dấu hiệu hội tụ

**Định lý 7.1.8 (Dấu hiệu so sánh)**: *Nếu* $|a_n| \leq b_n$ *với mọi* $n \geq N$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *hội tụ thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ (tuyệt đối).*

**Định lý 7.1.9 (Dấu hiệu so sánh dạng giới hạn)**: *Giả sử* $a_n \geq 0$ *và* $b_n \geq 0$ *với mọi* $n \geq N$ *và* $\lim \frac{a_n}{b_n} = k$*. Khi đó ta có các khẳng định sau.*

- *Nếu* $0 < k < +\infty$ *thì chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ khi và chỉ khi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *hội tụ.*

- *Nếu* $k = 0$ *thì chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *hội tụ kéo theo* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ.*

- *Nếu* $k = +\infty$ *thì chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *phân kỳ kéo theo* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ.*

**Định lý 7.1.10 (Dấu hiệu D' Alembert)** *Cho chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = D$*.*

- *Nếu* $D < 1$ *thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ tuyệt đối.*

- *Nếu* $D > 1$ *thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ.*

**Định lý 7.1.11 (Dấu hiệu Cauchy)** *Cho chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = C$.

- *Nếu* $C < 1$ *thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ tuyệt đối.*
- *Nếu* $C > 1$ *thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ.*

**Ví dụ 7.1.12** *a) Chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ *hội tụ theo dấu hiệu D' Alembert vì ta có*

$$D = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1.$$

*b) Chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^{2n}}$ *phân kỳ theo dấu hiệu Cauchy vì ta có*

$$C = \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \frac{n}{e^2} = +\infty.$$

**Định lý 7.1.13 (Dấu hiệu tích phân)** *Cho hàm số đơn điệu* $f : [1; +\infty) \to [0; +\infty)$. *Khi đó ta có chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *hội tụ khi và chỉ khi* $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ.*

**Ví dụ 7.1.14** *Chứng minh rằng chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *hội tụ khi và chỉ khi* $p > 1$.

**Định lý 7.1.15 (Dấu hiệu Leibniz)** *Cho chuỗi đan dấu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, *trong đó* $(a_n)$ *là dãy giảm và tiến về 0. Khi đó chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *hội tụ.*

**Ví dụ 7.1.16** *Chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *hội tụ theo dấu hiệu Leibniz vì dãy số* $(\frac{1}{n})$ *là dãy giảm tiến về 0.*

## 7.2 CHUỖI HÀM

### 7.2.1 Hội tụ điểm - Hội tụ đều

Cho dãy các hàm số $(f_n(x))$ cùng xác định trên một tập hợp $X \subset \mathbb{R}$. Khi đó ta gọi biểu thức

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

là chuỗi hàm trên $X$.
Tổng hữu hạn

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

với $x \in X$ được gọi là tổng riêng thứ $n$ của chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ trên $X$.

- Nếu tại $x_0 \in X$ chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ hội tụ (tương ứng, phân kỳ) thì ta gọi $x_0$ là **điểm hội tụ (tương ứng, điểm phân kỳ)** của chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

- Tập hợp các điểm hội tụ của chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ được gọi là **miền hội tụ** của chuỗi hàm đó. Như vậy nếu gọi $D$ là miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ thì với mỗi $x \in D$, chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sẽ hội tụ về một số $S(x)$. Khi đó ta nói chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **hội tụ từng điểm về hàm số** $S(x)$ **trên** $D$, ký hiệu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x), \forall x \in D$.

  Nói cách khác

  $$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x), \forall x \in D \iff \forall x \in D, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \epsilon.$$

- Ta nói chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **hội tụ đều về hàm số** $S(x)$ **trên** $D$, ký hiệu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{u}{=} S(x), \forall x \in D$ nếu

  $$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \epsilon, \forall x \in D.$$

  Một cách tương đương, ta có

  $$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{u}{=} S(x), \forall x \in D \iff \lim \sup_{x \in D} |S_n(x) - S(x)| = 0.$$

  Rõ ràng nếu chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ đều về hàm số $S(x)$ trên $D$ thì chuỗi hàm đó sẽ hội tụ từng điểm về $S(x)$ trên $D$ nhưng chiều ngược lại không đúng.

**Định lý 7.2.1** *Chuỗi hàm* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *hội tụ đều về hàm* $S(x)$ *trên* $D$ *khi và chỉ khi*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq N, n \geq N \Rightarrow |S_m(x) - S_n(x)| < \epsilon, \forall x \in D.$$

**Định lý 7.2.2 (Dấu hiệu Weierstrass về sự hội tụ đều)**
*Giả sử* $|f_n(x)| \leq a_n$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}$ *và với mọi* $x \in D$. *Khi đó nếu chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ thì chuỗi hàm* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *hội tụ đều trên* $D$.

**Ví dụ 7.2.3** *Tìm miền hội tụ, hội tụ tuyệt đối của chuỗi hàm* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} x^n$.

**Ví dụ 7.2.4** *Xét chuỗi hàm* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$. *Ta có*

$$\left| \frac{\cos(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

*Mà chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *hội tụ nên theo dấu hiệu Weierstrass ta suy ra chuỗi hàm* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ *hội tụ đều trên* $\mathbb{R}$.

**Ví dụ 7.2.5** *Chứng minh chuỗi hàm* $\sum_{n=1}^{\infty} x^3 e^{-nx}$ *hội tụ đều trên* $[0; +\infty)$.

**Ví dụ 7.2.6** *Chuỗi lũy thừa* $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ *hội tụ đều trên đoạn* $[0; c]$ *với* $0 \leq c < 1$ *bất kỳ vì*

$$x^n \leq c^n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; c]$$

*và chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} c^n$ *hội tụ.*
*Tuy nhiên chuỗi lũy thừa* $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ *không hội tụ đều trên* $[0; 1)$.

### 7.2.2 Ứng dụng của sự hội tụ đều

Sự hội tụ đều sẽ bảo toàn các tính chất khả tích, liên tục hay khả vi khi chuyển từ các hàm $(f_n(x))$ sang chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Hơn nữa ta còn có thể lấy đạo hàm hay lấy tích phân từng số hạng của một chuỗi hàm khi chuỗi đó hội tụ đều.

**Định lý 7.2.7** *Cho chuỗi hàm* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *hội tụ đều về* $f(x)$ *trên* $D$. *Khi đó nếu với mọi* $n \in \mathbb{N}$ *các hàm* $f_n$ *liên tục trên* $D$ *thì* $f$ *cũng liên tục trên* $D$.

**Định lý 7.2.8** *Cho chuỗi hàm* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *hội tụ đều về* $f(x)$ *trên đoạn* $[a; b]$. *Khi đó nếu với mọi* $n \in \mathbb{N}$ *các hàm* $f_n$ *khả tích trên* $[a; b]$ *thì* $f$ *cũng khả tích trên* $[a; b]$. *Hơn nữa ta có*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

**Định lý 7.2.9** *Giả sử* $(f_n(x))$ *là một dãy các hàm số khả vi trên* $[a; b]$ *thỏa mãn các điều kiện sau:*

*(i) Tồn tại* $x_0 \in [a; b]$ *sao cho* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ *hội tụ.*

*(ii) Chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ *hội tụ đều về một hàm* $g(x)$ *trên* $[a; b]$.

*Khi đó* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *hội tụ đều về một hàm* $f(x)$ *trên đoạn* $[a; b]$ *và* $f'(x) = g(x)$ *với mọi* $x \in [a; b]$, *tức là*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 7

1) Tìm tổng của các chuỗi số sau

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

2) Chứng minh rằng nếu các chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ hội tụ thì các chuỗi số sau cũng hội tụ.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$

3) Chứng minh rằng nếu chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ cũng hội tụ. Chiều ngược lại có đúng không?

4)* Cho $(a_n)$ là dãy các số dương giảm, tiến về 0 sao cho $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ. Chứng minh rằng $\lim na_n = 0$.

5) Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^2+n} - n$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{2\sqrt{n}}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{n^2-1}{n^3+1}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \tan \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$

6) Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n!)}{n^n}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{3^n n^{n^2}}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ với $p \in \mathbb{R}$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$

7) Xét sự hội tụ của các chuỗi đan dấu sau

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n+2}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+n+2}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$, với $p \in \mathbb{R}$

d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$, với $p \in \mathbb{R}$

8) Tìm miền hội tụ, hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của các chuỗi hàm sau

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$

c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$

9) Dùng dấu hiệu Weierstrass chứng minh các chuỗi hàm sau hội tụ đều trên miền đã cho

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^3}$, $x \in \mathbb{R}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sin(nx)}{\sqrt[4]{x^4+n^5}}$, $x \in \mathbb{R}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+x^2n^4}$, $x \in [0; +\infty)$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^3 e^{-nx}$, $x \in [0; +\infty)$

10) Dùng phương pháp đạo hàm hoặc tích phân từng số hạng, hãy tính các tổng sau

a) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$

b) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots$

c) $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

d) $\frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{3.4} + \dots$

e) $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$

f) $1.2x + 2.3x^2 + 3.4x^3 + \dots$

## ÔN TẬP CUỐI KHÓA

**Chương 2:**

Yêu cầu về lý thuyết: Hiểu và vận dụng được các phần sau.

- Các khái niệm về cận trên, cận dưới, sup, inf của một tập hợp.
- Các đặc trưng tương đương của sup, inf.
- Nguyên lý Supremum - Nguyên lý Quy nạp Toán học - Nguyên lý Archimedes - Tính trù mật của $Q$ và $Q^c$ trong $\mathbb{R}$

Yêu cầu về thực hành: Giải được các bài tập 8-12, 14.

**Chương 3:**

Yêu cầu về lý thuyết: Hiểu và vận dụng được các phần sau.

- Dãy hội tụ, dãy có giới hạn $\pm\infty$
- Các tính chất về thứ tự của giới hạn dãy số, đặc biệt là **Nguyên lý kẹp**.
- Định lý hội tụ đơn điệu Weierstrass.
- Dãy con và định lý Bolzano-Weierstrass.
- Dãy Cauchy và tiêu chuẩn Cauchy.

Yêu cầu về thực hành: Giải được các bài tập 1-4, 9-12, 14 và 19.

**Chương 4:**

Yêu cầu về lý thuyết: Hiểu và vận dụng được các phần sau.

- Khái niệm lân cận, điểm giới hạn và điểm cô lập.
- Định nghĩa chung về giới hạn hàm số qua ngôn ngữ lân cận, các định nghĩa giới hạn hàm số qua ngôn ngữ bất đẳng thức và ngôn ngữ dãy số.

- Khái niệm hàm số liên tục và đặc trưng tương đương bằng dãy số hội tụ.
- Khái niệm hàm số liên tục đều và đặc trưng tương đương bằng dãy số.
- Các định lý quan trọng: Định lý giá trị cực biên Weierstrass và Định lý giá trị trung gian.

Yêu cầu về thực hành: Giải được các bài tập 3-5, 7 (a và b), 10, 13-15, 18.

**Chương 5:**

Yêu cầu về lý thuyết: Hiểu và vận dụng được các phần sau.

- Khái niệm đạo hàm và vi phân của một hàm số trên một tập mở $D$.
- Nhận xét 5.1.2.
- Định nghĩa của các lớp $C^n(D)$ và $C^\infty(D)$.
- Các định lý giá trị trung bình: Fermat và Lagrange.
- Quy tắc L' Hôpital.
- Khai triển Taylor với các phần dư Peano và Lagrange. Khai triển Maclaurin cho một số hàm sơ cấp cơ bản.

Yêu cầu về thực hành: Giải được các bài tập 1-2, 6, 9-10, 12-14, 16.

**Chương 6:**

Yêu cầu về lý thuyết: Hiểu và vận dụng được các phần sau.

- Khái niệm tích phân suy rộng với cận vô hạn.
- Khái niệm tích phân suy rộng với hàm số dưới dấu tích phân không bị chặn.
- Các dấu hiệu so sánh.
- Dấu hiệu hội tụ tuyệt đối.

Yêu cầu về thực hành: Giải được các bài tập 1-5.

**Chương 7:**

Yêu cầu về lý thuyết: Hiểu và vận dụng được các phần sau.

- Chuỗi số hội tụ và tiêu chuẩn Cauchy về sự hội tụ của chuỗi số.
- Các dấu hiệu hội tụ: So sánh, Cauchy, D 'Alembert, Leibniz và tích phân.
- Chuỗi hàm hội tụ điểm, chuỗi hàm hội tụ đều.
- Chứng minh chuỗi hàm hội tụ đều bằng Định lý Weierstrass về sự hội tụ đều.

Yêu cầu về thực hành: Giải được các bài tập 1, 5-9.

**ĐỀ MẪU**

**Câu 1:** a) Tính $\lim\left(\frac{n^2}{n^3+1}+\frac{n^2}{n^3+2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n}\right)$.

b) Tính $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\tan(\sin x)}-\frac{1}{x}\right)$.

**Câu 2:** a) Cho hàm số liên tục $f:[0;\frac{\pi}{2}]\to[0;1]$. Chứng minh rằng phương trình $f(x)=\cos x$ có ít nhất một nghiệm trong $[0;\frac{\pi}{2}]$.

b) Chứng minh hàm số $f(x)=x^3+x^2+x$ không liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

**Câu 3:** a) Xét tính khả vi của hàm số $f(x)=\begin{cases} x^3, \text{ nếu } & x\in\mathbb{Q} \\ -x^3, \text{ nếu } & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.

b) Cho $f\in C^2(\mathbb{R})$. Giả sử $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a\in\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=0$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

**Câu 4:** a) Tính $\int\limits_0^1 x\ln x dx$.

b) Tìm $p\in\mathbb{R}$ sao cho $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x^p}dx$ hội tụ.

**Câu 5:** a) Tìm miền hội tụ $D$ của chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^n$.

b) Chứng minh chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^n$ hội tụ đều trên $D$.