BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HCM
KHOA TOÁN - TIN HỌC

GIẢI TÍCH HÀM MỘT BIẾN

CHƯƠNG 1

TẬP HỢP – MỆNH ĐỀ - ÁNH XẠ

Giảng viên: **TRẦN TRÍ DŨNG**

LỚP SƯ PHẠM TOÁN B (K44) – NHÓM 1:

Họ và tên	MSSV	Công việc
1. Lê Thanh Tùng	43.01.101.117	Bài 1,2
2. Lê Phước Tài	43.01.103.037	Bài 3,4
3. Nguyễn Hồng Dương	43.01.103.011	Bài 5,6
4. Trần Lê Đăng Khoa	44.01.101.080	Bài 7,8
5. Trần Đình Đại Quân	44.01.101.114	Bài 9,10
6. Võ Tấn Dũng	44.01.101.005	Đánh máy bài 1,2,3
7. Hồ Anh Lộc	44.01.101.091	Đánh máy bài 4,5,6,7
8. Phùng Đình Minh Tú	44.01.101.034	Đánh máy bài 8,9,10

Bài 1: Chứng minh các tính chất đã nêu ở mục 1.1.3.

a. Tính giao hoán

- $A \cup B = B \cup A$

$x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B \vee x \in A \Leftrightarrow x \in (B \cup A)$

$\Rightarrow (A \cup B) \subset (B \cup A)$

Tương tự $(B \cup A) \subset (A \cup B)$

Suy ra $A \cup B = B \cup A$

- $A \cap B = B \cap A$

$x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in (B \cap A)$

$\Rightarrow (A \cap B) \subset (B \cap A)$

Tương tự $(B \cap A) \subset (A \cap B)$

Suy ra $A \cap B = B \cap A$

b. Tính kết hợp

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$$Ta\ chọn\ x\ sao\ cho: x \in (A \cup B) \cup C \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \\ x \in C \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$$

$\Rightarrow ((A \cup B) \cup C) \subset (A \cup (B \cup C))$

Tương tự $(A \cup (B \cup C)) \subset ((A \cup B) \cup C)$

Suy ra $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$$Ta\ chọn\ x\ sao\ cho: x \in (A \cap B) \cap C \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \\ x \in C \end{cases} \Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C)$$

$\Rightarrow ((A \cap B) \cap C) \subset (A \cap (B \cap C))$

Tương tự $(A \cap (B \cap C)) \subset ((A \cap B) \cap C)$

Suy ra $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

c. Tính phân phối

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in A \vee \begin{cases} x \in B \\ x \in C \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right. \wedge \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in C \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\Rightarrow (A \cup (B \cap C)) \subset ((A \cup B) \cap (A \cup C))$

Tương tự $((A \cup B) \cap (A \cup C)) \subset (A \cup (B \cap C))$

Suy ra $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A \wedge \left[\begin{array}{l} x \in B \\ x \in C \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases} \vee \begin{cases} x \in A \\ x \in C \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\Rightarrow (A \cap (B \cup C)) \subset ((A \cap B) \cup (A \cap C))$

Tương tự $((A \cap B) \cup (A \cap C)) \subset (A \cap (B \cup C))$

Suy ra $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

d. Tính chất đối ngẫu De Morgan

- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$$x \in (A \cap B)c \Rightarrow x \in X\backslash(A \cap B) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in X \\ x \notin A \\ x \notin B \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in X\backslash A \\ x \in x\backslash B \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c \Rightarrow (A \cap B)^c \subset (A^c \cup B^c)$

Tương tự $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$

Suy ra $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

- $x \in (A \cup B)c \Rightarrow x \in X\backslash(A \cup B) \Leftrightarrow x \in X \wedge \left[\begin{array}{l} x \notin A \\ x \notin B \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x \in X\backslash A \\ x \in X\backslash B \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in (A^c \cap B^c) \Rightarrow (A \cup B) \subset (A^c \cap B^c)$

Tương tự $(A^c \cap B^c) \subset (A \cup B)^c$

Suy ra $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Bài 2: Cho các tập hợp A, B, C. Chứng minh:

a) $A \cap (B \backslash A) = \emptyset$ b) $A \cup (B \backslash A) = A \cup B$ c) $(A \cap B) \cup (A \backslash B) = A$

d) $A\backslash(B\backslash C) = (A\backslash B) \cup (A \cap C)$

e) $A^c \cap B^c = B^c$ và $B \subset A$ khi và chỉ khi $A = B$

a) $A \cap (B \backslash A) = \emptyset$

Giả sử $A \cap (B\backslash A) \neq \emptyset$

Khi đó $x \in A \cap (B\backslash A)$

Suy ra $\begin{cases} x \in A \\ x \in B \wedge x \notin A \end{cases} \Leftrightarrow x \in A \cap B \cap A^c = \emptyset$ (vô lý)

Vậy $A \cap (B\backslash A) = \emptyset$

b) $A \cup (B \backslash A) = A \cup B$

$A \cup (B\backslash A) = A \cup (B \cap A^c) = (A \cup B) \cap (A \cup A^c) = A \cup B$

c) $(A \cap B) \cup (A \backslash B) = A$

$(A \cap B) \cup (A\backslash B) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A \cap (B \cup B^c) = A$

d) $A\backslash(B\backslash C) = (A\backslash B) \cup (A \cap C)$

$A\backslash(B\backslash C) = A\backslash(B \cap C^c)$

$= A \cap (B \cap C^c)^c = A \cap (B^c \cup C)$

$= (A \cap B^c) \cup (A \cap C) = (A\backslash B) \cup (A \cap C)$

e) $A^c \cap B^c = B^c$ và $B \subset A$ khi và chỉ khi $A = B$

$(\Rightarrow) A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = B^c \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$
Mà $B \subset A$
$\Rightarrow A = B$
$(\Leftarrow)$ Ta có $A = B \Rightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$
$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow (A \cup B)^c = B^c \Leftrightarrow A^c \cap B^c = B^c$

Bài 3: Cho A, B là các tập con cna X và C, D là các tập con của Y . Chứng minh:
a)$(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$ b)$(A \times C) \cup (A \times D) = A \times (C \cup D)$
c)*$(A \times C) \cup (B \times D) \subset (A \cup B) \times (C \cup D)$ Cho ví dụ chi đẳng thức không xảy ra.

a)
Lấy $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x,y) \in (A \times C)\\(x,y) \in (B \times D)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \in A \wedge y \in C\\x \in B \wedge y \in D\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \in A \cap B\\y \in C \cap D\end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$
Vậy $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$
b)
Lấy $(x, y) \in (A \times C) \cup (A \times D)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x,y) \in (A \times C)\\(x,y) \in (B \times D)\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}x \in A\\y \in C\end{cases} \vee \begin{cases}x \in B\\y \in D\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \in A\\\left[\begin{array}{l}y \in C\\y \in D\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \in A\\y \in (C \cup D)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x, y) \in A \times (C \cup D)$
Vậy $(A \times C) \cup (A \times D) = A \times (C \cup D)$
c)
- Chứng minh:
$Lấy\ (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times D)$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}(x,y) \in (A \times C)\\(x,y) \in (B \times D)\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x \in A \wedge y \in C\\x \in B \wedge y \in D\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x \in A\\x \in B\end{array}\right. \wedge \left[\begin{array}{l}y \in C\\y \in D\end{array}\right.$$

$\Rightarrow (x, y) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$
$\Rightarrow (A \times C) \cup (B \times D) \subset (A \cup B) \times (C \cup D)$

- Ví dụ để đẳng thức không xảy ra

$A = \{1\}\ B = \{2\}\ C = \{3\}\ D = \{4\}$
$\Rightarrow (A \times C) \cup (B \times D) = \{(1,3), (2,4)\}$
$A \cup B = \{1,2\}$
$C \cup D = \{3,4\}$
$Lấy\ (x, y) = (1,4) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$
$(1,4) \notin (A \times C) \cup (B \times D)$

Bài 4: Bằng cách lập bảng giá trị logic 0 và 1, hãy chứng minh mệnh đề 1.2.2

- $p \Rightarrow q \equiv \bar{q} \Rightarrow \bar{p} \equiv \bar{p} \vee q.$

P	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \Rightarrow q$	$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$	$\bar{p} \vee q$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1

0	0	1	1	1	1	1

- $\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}, \overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}.$

P	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$
1	1	0	0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1

- $\overline{p \Rightarrow q} \equiv p \wedge \bar{q}$

P	q	$\bar{q}$	$p \wedge \bar{q}$	$p \Rightarrow q$	$\overline{p \Rightarrow q}$
1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0

Bài 5: Xét p, q là các mệnh đề trong ví dụ 1.2.1. Hãy phát biểu và xét tính đúng, sai của mệnh đề sau đây: $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \Rightarrow q$, $\bar{p}$, $\bar{p} \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$.

(*Ví dụ 1.2.1*: Cho p là mệnh đề: 17 là số nguyên tố, còn q là mệnh đề: $\sqrt{2}$ là số hữu tỷ. Khi đó p ≡ 1, $q \equiv 0$)

Phát biểu:

- $p \vee q$: 17 là số nguyên tố hoặc $\sqrt{2}$ là số hữu tỷ
- $p \wedge q$: 17 là số nguyên tố và $\sqrt{2}$ là số hữu tỷ
- $p \Rightarrow q$: nếu 17 là số nguyên tố thì $\sqrt{2}$ là số hữu tỷ
- $\bar{p}$: 17 không là số nguyên tố
- $\bar{p} \Rightarrow q$: nếu 17 không là số nguyên tố thì $\sqrt{2}$ là số hữu tỷ
- $p \Leftrightarrow q$: 17 là số nguyên tố nếu và chỉ nếu $\sqrt{2}$ là số hữu tỷ

P	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$\bar{p}$	$\bar{p} \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	0	1	0	0	0	1	0

Bài 6: Trong các phát biêu dưới đây, phát biêu nào là mệnh đe. Hãy nêu tính đúng sai của từng mệnh để.

a) $\forall k \in Z : \exists k^2 - k \geq 0$.

b) $\forall z \in Z, \exists r \in Q : z^2 - rz + r \geq 1$.

c) Tồn tạ một hành tinh có khôi lượng lớn hơn Trái Đât.

d) Tất cả các con chó có đôi cánh đều có bộ lông màu trắng.

e)* Vói mọi số nguyên không âm x, y, z, nếu $x^{2015} + y^{2015} = z^{2015}$ thì $x + y \geq z$.

Các phát biểu đã cho đêu là mệnh đề.

a)

Ta có: $k^2 - k \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k \geq 1 \\ k \leq 0 \end{array}\right.$

Mà $k \in Z$ nên mệnh đề trên là đúng.

b)
Ta có: $\forall z \in \mathbb{Z}, \exists r = 2 \in \mathbb{Q}: z^2 - rz + r \geq 1. Do$ đó $mệnh$ đề đã cho là đúng.
Mệnh đề đã cho đúng vì có Mộc tinh là hành tinh có khối lượng lớn hơn Trái Đất.
Xét mệnh đề: Tồn tại một con chó x sao cho x có đôi cánh và x không có bộ lông màu trắng.
Vì không có con chó nào có cánh nên mệnh đề này sai. Vậy mệnh đề đã cho là đúng.

e)

* Xét mệnh đề:

Với mọi số nguyên không âm x, y, z, nếu $x + y < z$ thì $x^{2015} + y^{2015} \neq z^{2015}$.(1)

Ta có: $x + y < z$

$\Rightarrow (x + y)^{2015} < z^{2015}$

$\Longrightarrow x^{2015} + C_{2015}^{1} x^{2014} y + C_{2015}^{2} x^{2013} y^2 + \cdot \cdot \cdot + y^{2015} < z$

$\Rightarrow x^{2015} + y^{2015} < z^{2015}$ (do x, y, z là số nguyên không âm)

$\Rightarrow x^{2015} + y^{2015} \quad z^{2015}$

Vậy (1) đúng nên mệnh đề đã cho đúng.

Bài 7: Cho ánh xạ $f: X \to Y$. Giả sử A_1, A_2 là các tập con của X còn B_1, B_2 là các tập con của Y. Chứng minh

a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$; $\quad f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

b) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$; $\quad f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

c) Nếu f đơn ánh thì $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

a)

* Chứng minh: $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

$Lấy\ x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$

$\Longrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \in B_1 \\ f(x) \in B_2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in f^{-1}(B_1) \\ x \in f^{-1}(B_2) \end{array}\right.$

$\Longrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \Longrightarrow f^{-1}(B_1 \cup B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

Chứng minh tương tự cho chiều ngược lại

Vậy $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

Tương tự chứng minh được $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

b)

Chứng minh $f(A1 \cup A2) = f(A1) \cup f(A2)$:

Lấy $y \in f(A1 \cup A2)$

$\Longrightarrow \exists x \in A_1 \cup A_2: f(x) = y$

$\Longrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \in f(A_1) \\ f(x) \in f(A_1) \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) \in f(A_1) \cup f(A_2)$

Do đó $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_1)$

Chứng minh tương tự cho chiều ngược lại.

Vậy $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_1)$

Chứng minh $f(A1 \cap A2) \subset f(A1) \cap f(A2)$

TH1: VT=$\emptyset$

TH2: VT$\neq \emptyset$

Lấy $y \in f(A_1 \cap A_2)$

$\Longrightarrow \exists x \in A_1 \cap A_2: f(x) = y$

$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \in f(A_1) \\ f(x) \in f(A_2) \end{cases} \Rightarrow y = f(x) \in f(A_1) \cap f(A_2)$

$V\hat{a}y f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$

c)

Lấy $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$

$y \in f(A_1) \Rightarrow \exists x_1 \in A_1 : y = f(x_1)$

$y \in f(A_2) \Rightarrow \exists x_2 \in A_2 : y = f(x_2)$

Do f đơn ánh nên $x_1 = x_2 = x$

$\Rightarrow x \in A_1$ và $x \in A_2$

$\Rightarrow x \in A_1 \cap A_2$

$\Rightarrow y = f(x) \in f(A_1 \cap A_2)$

Do đó $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A \cap A_2)$.

Vậy ta có đpcm.

Bài 8*: Cho ánh xạ $f : X \to Y$. Khi đó các phát biểu a) và b) là tương đương:

a) f đơn ánh.

bVới mọi tập con A của X, ta đều có $A = f^{-1}(f(A))$.

Các phát biểu c) và d) cũng tương đương:

c) f toàn ánh.

d)Với mọi tập con B của Y, ta đều có $B = f(f^{-1}(B))$.

I. Chứng minh a⇔b

- $a \Rightarrow b$

  Giả sử f đơn ánh. Ta chứng minh $A = f^{-1}(f(A))$, $\forall A \subset X$.

  – Lấy $x \in A$ tùy ý.
  $\Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$
  Suy ra $A \subset f^{-1}(f(A))$

  – Lấy $x \in f^{-1}(f(A))$ tùy ý.
  $\Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow \exists y \in A : f(y) = f(x)$
  Do f đơn ánh nên $y = x \Rightarrow x \in A$
  Suy ra $f^{-1}(f(A)) \subset A$

  Vậy $A = f^{-1}(f(A))$.

- $b \Rightarrow a$

  Giả sử $A = f^{-1}(f(A)), \forall A \subset X$. Ta chứng minh f đơn ánh.
  Ta lấy $x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2)$
  Đặt $A = \{x_1\}$, $B = \{x_2\}$
  Suy ra $f(A_1) = f(x_1) = f(x_2) = f(B)$
  $\Rightarrow A = f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(B)) = B$
  $\Rightarrow x_1 = x_2$

Suy ra f đơn ánh.

Vậy a ⇔ b.

II. Chứng minh c ⇔ d:

- $c \Rightarrow d$

  Gỉa sử f toàn ánh, ta chứng minh $B = f^{-1}(f(B))$, $\forall B \subset Y$.

  – Lấy $y \in B$
  $\Rightarrow \exists x \in X : y = f(x)$ (do f toàn ánh)
  $\Rightarrow f(x) \in B \Rightarrow x \in f^{-1}(B)$
  $\Rightarrow f(x) \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow y \in f(f^{-1}(B))$.
  Suy ra $B \subset f(f^{-1}(B))$.

  – Lấy $y \in f(f^{-1}(B))$
  $\Rightarrow \exists x \in f^{-1}(B) : y = f(x)$
  Ta lai có $x \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(x) \in B \Rightarrow y \in B$.
  Suy ra $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

  Vậy $B = f(f^{-1}(B))$.

- $d \Rightarrow c$

  Giả sử f không toàn ánh $\exists y \in Y, \forall x \in X : y = f(x)$. (1)
  Lấy $B \in Y$ sao cho $y \in B$
  Khi đó $y \in f(f^{-1}(B))$ (do $B = f(f^{-1}(B))$)
  $\Longrightarrow \exists x \in f^{-1}(B) \subset X : f(x) = y$ (mâu thuẫn vói (1)).
  Vậy f toàn ánh.

Vậy c⇔d.

Bài 9: Cho các ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$. Chứng minh:
a) Nếu $g \circ f$ là đơn ánh thì f là đơn ánh.
b) Nếu $g \circ f$ là toàn ánh thì g là toàn ánh.
c) Nếu f và g song ánh thì $g \circ f$ cũng song ánh. Khi đó các ánh xạ f, g, $g \circ f$ đều có các ánh xạ ngược thõa mãn tính chất sau: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

a) Giả sử f không là đơn ánh

$\Longrightarrow \exists\ x_1 \neq x_2$ thuộc X : $f(x_1) = f(x_2)$
$\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$
$\Longrightarrow g \circ f$ không là đơn ánh
Vậy f đơn ánh.
b) $g \circ f$ là toàn ánh⇔ $g(f(x))$=Z
$g(Y) \subset Z$ Ta chỉ cần chứng minh $Z \subset g(Y)$
$f(X) \subset Y \Rightarrow Z = g(f(X)) \subset g(Y)$
Vậy $Z = g(Y)$ nên g là toàn ánh

c)

I.Chúng minh $g \circ f$ song ánh: Ta cần chứng minh $g \circ f$ vừa đơn ánh vừa toàn ánh

1) Chứng minh nếu f và g là đơn ánh thì $g \circ f$ là đơn ánh

f là đơn ánh: $\forall a,b \in X,\ a \neq b \Longrightarrow f(a) \neq f(b)$

g là đơn ánh: $f(a) \neq f(b) \Longrightarrow g(f(a)) \neq g(f(b))$

Vậy $g \circ f$ là đơn ánh

2) Chứng minh nếu f và g là song ánh thì $g \circ f$ là song ánh

g toàn ánh: $\forall z \in Z,\ \exists y \in Y:\ z=g(Y)$

f toàn ánh: $y \in Y, \exists x \in X:\ y=f(x)$

$\forall z \in Z,\ \exists x \in X:\ z=g(f(x))$

Vậy $g \circ f$ là toàn ánh

Vậy $g \circ f$ là song ánh

II.Chứng minh $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$: Lấy $z \in Z$ tùy ý, ta có:

$(g \circ f)^{-1}(z) = x \in X$

$\Rightarrow z = g \circ f(x) = g(f(x))$

$\Rightarrow f(x) = g^{-1}(z) = y \in Y$

$\Rightarrow x = f^{-1}(y) = f^{-1}(g^{-1}(z)) = f^{-1} \circ g^{-1}(z)$.

Vậy $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Bài 10: Cho các ánh xạ $f,\ g : X \to X$ sao cho $f \circ g$ là song ánh. Chứng minh rằng f đơn ánh khi và chỉ khi g toàn ánh.

- Chiều thuận:

  Giả sử f đơn ánh.

  Lấy $b \in X$, đặt $c = f(b)$

  $\Rightarrow \exists\, a \in X : c = f \circ g(a) = f(g(a)) = f(b)$ (do $f \circ g$ toàn ánh)

  Vì f đơn ánh nên $b = g(a)$

  Tù đó ta có: $\forall\, b \in X,\ \exists\, a \in X : b = g(a)$.

  Suy ra g toàn ánh.

- Chiều đảo:

  Giả sử g toàn ánh.

  $Lấy\ b_1, b_2 \in X: f(b_1) = f(b_2)$

  $Vì\ g\ là\ toàn\ ánh\ nên \begin{cases} \exists a_1 \in X: g(a_1) = b_1 \\ \exists a_2 \in X: g(a_2) = b_2 \end{cases}$

  Khi đó ta có : $f\big(g(a_1)\big) = f\big(g(a_2)\big) \Leftrightarrow f \circ g(a_1) = f \circ g(a_2)$

  $\Longrightarrow a_1 = a_2 (do f \circ g$ đơn $ánh)$

  $\Longrightarrow b_1 = b_2$

  $Suy\ ra\ f$ đơn $ánh$

  Vậy f đơn ánh khi và chỉ khi g toàn ánh